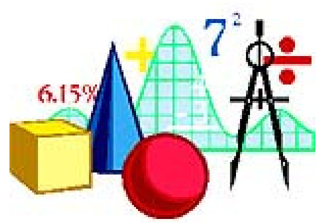
500
Bài Toán Bất Đẳng Thức Chọn Lọc

Cao Minh Quang

♦♦♦♦♦



Vĩnh Long, Xuân Mậu Tý, 2008

500 Bài Toán Bất Đẳng Thức Chọn Lọc

♦♦♦♦♦

1. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Komal

2. [Dinu Serbănescu] Cho $a,b,c\in(0,1)$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1.$$

Junior TST 2002, Romania

3. [Mircea Lascu] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3.$$

Gazeta Matematică

4. Nếu phương trình $x^4+ax^3+2x^2+bx+1=0$ có ít nhất một nghiệm thực, thì

$$a^2+b^2\geq 8.$$

Tournament of the Towns, 1993

5. Cho các số thực x,y,z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

6. Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}\leq a+b+c.$$

Ukraine, 2001

7. [Darij Grinberg] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

8. [Hojoo Lee] Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}+\sqrt{b^4+b^2c^2+c^4}+\sqrt{c^4+c^2a^2+a^4}\geq a\sqrt{2a^2+bc}+b\sqrt{2b^2+ca}+c\sqrt{2c^2+ab}.$$

Gazeta Matematică

9. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=2$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3\geq a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}.$$

JBMO 2002 Shortlist

10. [Ioan Tomescu] Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{xyz}{(1+3x)(x+8y)(y+9z)(z+6)}\leq\frac{1}{7^4}.$$

Gazeta Matematică

11. [Mihai Piticari, Dan Popescu] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$5\left(a^2+b^2+c^2\right)\le 6\left(a^3+b^3+c^3\right)+1.$$

12. [Mircea Lascu] Cho $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}$, $n\ge 2$, $a>0$ sao cho

$$x_1+x_2+...+x_n=a,\ x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\le\frac{a^2}{n-1}.$$

Chứng minh rằng

$$x_i\in\left[0,\frac{2a}{n}\right], i=1,2,...,n.$$

13. [Adrian Zahariuc] Cho $a,b,c\in(0,1)$. Chứng minh rằng

$$\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c}-c\sqrt{a}}+\frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a}-a\sqrt{b}}+\frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b}-b\sqrt{c}}\ge 1.$$

14. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc\le 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge a+b+c.$$

15. [Vasile Cirtoaje, Mircea Lascu] Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+x\ge b+y\ge c+z,\ a+b+c=x+y+z$. Chứng minh rằng

$$ay+bx\ge ac+xz.$$

16. [Vasile Cirtoaje, Mircea Lascu] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$1+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{6}{ab+bc+ca}.$$

Junior TST 2003, Romania

17. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

JBMO 2002 Shortlist

18. Cho $x_1,x_2,...,x_n>0,\ n>3$ thỏa mãn điều kiện $x_1x_2...x_n=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2x_3}+...+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}>1.$$

Russia, 2004

19. [Marian Tetiva] Cho x,y,z là các số thực dương thỏa điều kiện $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$. Chứng minh rằng

a) $xyz\le\frac{1}{8}$,

b) $x+y+z\le\frac{3}{2}$,

c) $xy+yz+zx\le\frac{3}{4}\le x^2+y^2+z^2$,

d) $xy+yz+zx\le\frac{1}{2}+2xyz$.

20. [Marius Olteanu] Cho $x_1,x_2,...,x_5\in\mathbb{R}$ sao cho $x_1+x_2+...+x_5=0$. Chứng minh rằng

$$\left|\cos x_1\right|+\left|\cos x_2\right|+...+\left|\cos x_5\right|\ge 1.$$

Gazeta Matematică

21. [Florina Cârlan, Marian Tetiva] Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng

$$xy+yz+zx\ge 3+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}.$$

22. [Laurentiu Panaitopol] Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x,y,z>-1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\ge 2.$$

JBMO, 2003

23. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b}\ge 2.$$

24. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn điều kiện $a^4+b^4+c^4\le 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\le 2\left(ab+bc+ca\right).$$

Kvant, 1988

25. Cho $x_1,x_2,...,x_n>0,n>2$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+...+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}}{n-1}\ge 1998.$$

Vietnam, 1998

26. [Marian Tetiva] Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=xyz$. Chứng minh rằng

a) $xyz\ge 27$,

b) $xy+yz+zx\ge 27$,

c) $x+y+z\ge 9$,

d) $xy+yz+zx\ge 2\left(x+y+z\right)+9$.

27. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ge xy+yz+zx.$$

Russia 2002

28. [D. Olteanu] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{b+c}.\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b+c}{c+a}.\frac{b}{2b+c+a}+\frac{c+a}{a+b}.\frac{c}{2c+a+b}\geq\frac{3}{4}.$$

Gazeta Matematică

29. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{c+a}{c+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}.$$

India, 2002

30. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ac+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}\geq\frac{3(ab+bc+ca)}{a+b+c}.$$

Proposed for the Balkan Mathematical Olympical

31. [Adrian Zahariuc] Cho $x_1,x_2,...,x_n$ là các số nguyên đôi một phân biệt nhau. Chứng minh rằng

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\geq x_1x_2+x_2x_3...+x_nx_1+2n-3.$$

32. [Murray Klamkin] Cho $x_1,x_2,...,x_n\geq 0, n>2$ thỏa mãn điều kiện $x_1+x_2+...+x_n=1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x_1^2x_2+x_2^2x_3+...+x_{n-1}^2x_n+x_n^2x_1.$$

Crux Mathematicorum

33. Cho $x_1,x_2,...,x_n>0$ thỏa mãn điều kiện $x_{k+1}\geq x_1+x_2+...+x_k$ với mọi k. Hãy tìm giá trị lớn nhất của hằng số c sao cho $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n}\leq c\sqrt{x_1+x_2+...+x_n}$.

IMO Shortlist, 1986

34. Cho các số thực dương a,b,c,x,y,z thỏa mãn điều kiện $a+x=b+y=c+z=1$. Chứng minh rằng

$$(abc+xyz)\left(\frac{1}{ay}+\frac{1}{bz}+\frac{1}{cx}\right)\geq 3.$$

Russia, 2002

35. [Viorel Vâjâitu, Alexvàru Zaharescu] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\leq\frac{1}{4}(a+b+c).$$

Gazeta Matematică

36. Cho a,b,c,d là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$a^3(b+c+d)+b^3(c+d+a)+c^3(d+a+b)+d^3(a+b+c).$$

37. [Walther Janous] Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\le 1.$$

Crux Mathematicorum

38. Cho $a_1, a_2, ..., a_n, n\ge 2$ là n số thực sao cho $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Chứng minh rằng

$$a_1a_2^4 + a_2a_3^4 + ... + a_na_1^4 \ge a_2a_1^4 + a_3a_2^4 + ... + a_1a_n^4.$$

39. [Mircea Lascu] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

40. Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên dương lớn hơn 1. Tồn tại ít nhất một trong các số $\sqrt[a_1]{a_1}, \sqrt[a_2]{a_3}, ..., \sqrt[a_{n-1}]{a_n}, \sqrt[a_n]{a_1}$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt[3]{3}$.

Adapted after a well – known problem

41. [Mircea Lascu, Marian Tetiva] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx + 2xyz = 1$. Chứng minh rằng

a) $xyz \le \frac{1}{8}$,

b) $x + y + z \ge \frac{3}{2}$,

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 4(x+y+z)$,

d) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-4(x+y+z)\ge \frac{(2z-1)^2}{z(2z+1)}, z=\max\{x,y,z\}$.

42. [Manlio Marangelli] Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$3\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)\ge xyz(x+y+z)^3.$$

43. [Gabriel Dospinescu] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\max\{a,b,c\}-\min\{a,b,c\}\le 1$$

Chứng minh rằng

$$1+a^3+b^3+c^3+6abc\ge 3a^2b+3b^2c+3c^2a.$$

44. [Gabriel Dospinescu] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$27+\left(2+\frac{a^2}{bc}\right)\left(2+\frac{b^2}{ca}\right)\left(2+\frac{c^2}{ab}\right)\ge 6(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

45. Cho $a_0=\frac{1}{2}$, $a_{k+1}=a_k+\frac{a_k^2}{n}$. Chứng minh rằng

$$1-\frac{1}{n}< a_n < 1.$$

TST Singapore

46. [Călin Popa] Cho $a, b, c \in (0,1)$ thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\geq\frac{3}{4}\left(\frac{1-a^2}{a}+\frac{1-b^2}{b}+\frac{1-c^2}{c}\right).$$

47. [Titu Vàreescu, Gabriel Dospinescu] Cho $x,y,z\leq 1$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\leq\frac{27}{10}.$$

48. [Gabriel Dospinescu] Cho $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$. Chứng minh rằng

$$(1-x)^2(1-y)^2(1-z)^2\geq 2^{15}xyz(x+y)(y+z)(z+x).$$

49. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=x+y+z+2$. Chứng minh rằng

a) $xy+yz+zx\geq 2(x+y+z)$,

b) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq\frac{3}{2}\sqrt{xyz}$.

50. Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$. Chứng minh rằng

$$x+y+z\leq xyz+2.$$

IMO Shortlist, 1987

51. [Titu Vàreescu, Gabriel Dospinescu] Cho $x_1,x_2,...,x_n\in(0,1)$ và σ là một hoán vị của $\{1,2,...,n\}$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i}\geq\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right).\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i.x_{\sigma(i)}}\right).$$

52. Cho $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}=1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\geq(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}}.$$

Vojtech Jarnik

53. [Titu Vàreescu] Cho $n>3$ và $a_1,a_2,...,a_n$ là các số thực thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n}a_i\geq n$ và $\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geq n^2$. Chứng minh rằng

$$\max\{a_1,a_2,...,a_n\}\geq 2.$$

USAMO, 1999

54. [Vasile Cirtoaje] Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b}\geq 0.$$

55. Cho x,y là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$x^y+y^x>1.$$

France, 1996

56. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 4(a+b+c-1).$$

MOSP, 2001

57. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq abc(ab+bc+ca).$$

58. [D.P.Mavlo] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$3+a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{1+abc}.$$

Kvant, 1988

59. [Gabriel Dospinescu] Cho $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x_1x_2...x_n=1$. Chứng minh rằng

$$n^n.\prod_{i=1}^{n}(x_i^n+1)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^n.$$

60. Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+abcd\geq\min\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{9}+\frac{d}{27}\right\}.$$

Kvant, 1993

61. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sum(1+a^2)^2(1+b^2)^2(a-c)^2(b-c)^2\geq(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

AMM

62. [Titu Vàreescu, Mircea Lascu] Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=1$ và $\alpha\geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^\alpha}{y+z}+\frac{y^\alpha}{z+x}+\frac{z^\alpha}{x+y}\geq\frac{3}{2}.$$

63. Cho $x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_n\in\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=y_1^2+y_2^2+...+y_n^2=1$. Chứng minh rằng

$$(x_1y_2-x_2y_1)^2\leq 2\left(1-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right).$$

Korea, 2001

64. [Laurentiu Panaitopol] Cho $a_1,a_2,...,a_n$ là các số nguyên dương khác nhau từng đôi một. Chứng minh rằng

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\geq\frac{2n+1}{3}(a_1+a_2+...+a_n).$$

TST Romania

65. [Călin Popa] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{b\sqrt{c}}{a\left(\sqrt{3c}+\sqrt{ab}\right)}+\frac{c\sqrt{a}}{b\left(\sqrt{3a}+\sqrt{bc}\right)}+\frac{a\sqrt{b}}{c\left(\sqrt{3b}+\sqrt{ca}\right)}\geq\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

66. [Titu Vàreescu, Gabriel Dospinescu] Cho a,b,c,d là các số thực thỏa mãn điều kiện $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\left(1+d^2\right)=16$. Chứng minh rằng

$$-3\leq ab+bc+cd+da+ac+bd-abcd\leq 5.$$

67. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq 9\left(ab+bc+ca\right).$$

APMO, 2004

68. [Vasile Cirtoale] Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn các điều kiện $0<x\leq y\leq z$, $x+y+z=xyz+2$. Chứng minh rằng

a) $\left(1-xy\right)\left(1-yz\right)\left(1-zx\right)\geq 0$,

b) $x^2y\leq 1, x^3y^2\leq\frac{32}{27}$.

69. [Titu Vàreescu] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c\geq abc$. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau đây là đúng

$$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{6}{c}\geq 6, \frac{2}{b}+\frac{3}{c}+\frac{6}{a}\geq 6, \frac{2}{c}+\frac{3}{a}+\frac{6}{b}\geq 6.$$

TST 2001, USA

70. [Gabriel Dospinescu, Marian Tetiva] Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng

$$\left(x-1\right)\left(y-1\right)\left(z-1\right)\leq 6\sqrt{3}-10.$$

71. [Marian Tetiva] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left|\frac{a^3-b^3}{a+b}+\frac{b^3-c^3}{b+c}+\frac{c^3-a^3}{c+a}\right|\leq\frac{\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2}{4}.$$

Moldova TST, 2004

72. [Titu Vàreescu] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a^5-a^2+3\right)\left(b^5-b^2+3\right)\left(c^5-c^2+3\right)\geq\left(a+b+c\right)^3.$$

USAMO, 2004

73. [Gabriel Dospinescu] Cho $x_1,x_2,...,x_n>0, n>2$ thỏa mãn điều kiện

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)=n^2+1.$$

Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^2}\right)>n^2+4+\frac{2}{n\left(n-1\right)}.$$

74. [Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, Marian Tetiva] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3\ge(1+a)(1+b)(1+c).$$

75. [Titu Vàreescu, Zuming Feng] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(2c+b+c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8.$$

USAMO, 2003

76. Cho x,y là các số thực dương và m,n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$(n-1)(m-1)\left(x^{m+n}+y^{m+n}\right)+(m+n-1)\left(x^my^n+x^ny^m\right)\ge mn\left(x^{m+n-1}y+y^{m+n-1}x\right).$$

Austrian – Polish Competition, 1995

77. Cho a,b,c,d,e là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abcde=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+abc}{1+ab+abcd}+\frac{b+bcd}{1+bc+bcde}+\frac{c+cde}{1+cd+cdea}+\frac{d+dea}{1+de+deab}+\frac{e+eab}{1+ea+eabc}\ge\frac{10}{3}.$$

Crux Mathematicorum

78. [Titu Vàreescu] Cho $a,b,c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin a.\sin(a-b).\sin(a-c)}{\sin(b+c)}+\frac{\sin b.\sin(b-c).\sin(b-a)}{\sin(c+a)}+\frac{\sin c.\sin(c-a).\sin(c-b)}{\sin(a+b)}\ge 0.$$

TST 2003, USA

79. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\ge\sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}+\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}.$$

KMO Summer Program Test, 2001

80. [Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu] Cho $a_1,a_2,...,a_n>0,n>2$ thỏa mãn điều kiện $a_1a_2...a_n=1$. Hãy tìm hằng số k_n nhỏ nhất sao cho

$$\frac{a_1a_2}{\left(a_1^2+a_2\right)\left(a_2^2+a_1\right)}+\frac{a_2a_3}{\left(a_2^2+a_3\right)\left(a_3^2+a_2\right)}+...+\frac{a_na_1}{\left(a_n^2+a_1\right)\left(a_1^2+a_n\right)}\le k_n.$$

81. [Vasile Cirtoaje] Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$ax+by+cz+\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)}\ge\frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z).$$

Kvant, 1989

82. [Vasile Cirtoaje] Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-1\right)\ge 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right).$$

83. [Walther Janous] Cho $x_1,x_2,...,x_n>0,n>2$ thỏa mãn điều kiện $x_1+x_2+...+x_n=1$. Chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_i}\right)\ge\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{n-x_i}{1-x_i}\right).$$

Crux Mathematicorum

84. [Vasile Cirtoaje, Gheoghe Eckstein] Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x_1 x_2 ... x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+...+\frac{1}{n-1+x_n}\le 1.$$

TST 1999, Romania

85. [Titu Vàreescu] Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa điều kiện $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng

$$0\le ab+bc+ca-abc\le 2.$$

USAMO, 2001

86. [Titu Vàreescu] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\le \max\left\{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2,\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2,\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2\right\}.$$

TST 2000, USA

87. [Kiran Kedlaya] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3}\le \sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}.$$

88. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho với bất kì số nguyên dương n không chính phương, ta có

$$\left|\left(1+\sqrt{n}\right)\sin\left(\pi\sqrt{n}\right)\right|>k.$$

Vietnamese IMO Training Camp, 1995

89. [Trần Nam Dũng] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa điều kiện $\left(x+y+z\right)^3=32xyz$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{x^4+y^4+z^4}{\left(x+y+z\right)^4}.$$

Vietnam, 2004

90. [George Tsintifas] Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a+b\right)^3\left(b+c\right)^3\left(c+d\right)^3\left(d+a\right)^3\ge 16a^2b^2c^2d^2\left(a+b+c+d\right)^4.$$

Crux Mathematicorum

91. [Titu Vàreescu, Gabriel Dospinescu] Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$ và n là số nguyên dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{(ab)^n}{1-ab}+\frac{(bc)^n}{1-bc}+\frac{(ca)^n}{1-ca}.$$

92. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a\left(1+b\right)}+\frac{1}{b\left(1+c\right)}+\frac{1}{c\left(1+a\right)}\ge \frac{3}{\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)}.$$

93. [Trần Nam Dũng] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=9$. Chứng minh rằng

$$2(a+b+c)-abc \le 10.$$

Vietnam, 2002

94. [Vasile Cirtoaje] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)+\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)+\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\ge 3.$$

95. [Gabriel Dospinescu] Cho n là số nguyên lớn hơn 2. Tìm số thực lớn nhất m_n và số thực nhỏ nhất M_n sao cho với các số thực dương bất kì $x_1, x_2, ..., x_n$ (xem $x_n = x_0, x_{n+1} = x_1$), ta có

$$m_n \le \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1}+2(n-1)x_i+x_{i+1}} \le M_n.$$

96. [Vasile Cirtoaje] Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^2+xy+y^2}+\frac{1}{y^2+yz+z^2}+\frac{1}{z^2+zx+x^2}\ge \frac{9}{(x+y+z)^2}.$$

Gazeta Matematică

97. [Vasile Cirtoaje] Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$2(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)(d^3+1)\ge (1+abcd)(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2).$$

Gazeta Matematică

98. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4 \ge \frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4).$$

Vietnam TST, 1996

99. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\le \frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}.$$

Bulgaria, 1997

100. [Trần Nam Dũng] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa $21ab+2bc+8ca \le 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}.$$

Vietnam, 2001

101. [Titu Vàreescu, Gabriel Dospinescu] Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y)\ge 3.$$

102. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\ge \frac{3}{5}.$$

Japan, 1997

103. [Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu] Cho $a_1,a_2,...,a_n \ge 0, a_n = \min\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Chứng minh rằng

$$a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n - na_1a_2...a_n \ge (n-1)\left(\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1} - a_n\right)^n.$$

104. [Turkervici] Cho x, y, z, t là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 2xyzt \ge x^2y^2 + y^2z^2 + z^2t^2 + x^2z^2 + y^2t^2.$$

Kvant

105. Cho $a_1,a_2,...,a_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} \frac{ij}{i+j-1} a_i a_j.$$

106. Cho $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n \in (1001, 2002)$ sao cho $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^3}{b_1} + \frac{a_2^3}{b_2} + ... + \frac{a_n^3}{b_n} \le \frac{17}{10}\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right).$$

TST Singapore

107. [Titu Vàreescu, Gabriel Dospinescu] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right) \ge 8\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^2.$$

108. [Vasile Cirtoaje] Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abcd = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \ge 1.$$

Gazeta Matematică

109. [Vasile Cirtoaje] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \ge \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Gazeta Matematică

110. [Gabriel Dospinescu] Cho n số thực $a_1,a_2,...,a_n$. Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}^*} a_i\right)^2 \le \sum_{1\le i\le j\le n} \left(a_i + ... + a_j\right)^2.$$

TST 2004, Romania

111. [Trần Nam Dũng] Cho $x_1,x_2,...,x_n \in [-1,1]$ thỏa mãn điều kiện $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

112. [Gabriel Dospinescu, Călin Popa] Cho n số thực $a_1,a_2,...,a_n, n \ge 2$ thỏa mãn điều kiện $a_1a_2...a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 - n \ge \frac{2n}{n-1}\sqrt[n]{n-1}\left(a_1 + a_2 + ... + a_n - n\right).$$

113. [Vasile Cirtoaje] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \le 3.$$

Gazeta Matematică

114. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(xy + yz + zx\right)\left[\frac{1}{\left(x+y\right)^2} + \frac{1}{\left(y+z\right)^2} + \frac{1}{\left(z+x\right)^2}\right] \ge \frac{9}{4}.$$

Iran, 1996

115. [Cao Minh Quang] Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\prod_{i=1}^{n}\left(3x_i + 1\right) \le 2^n.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{6x_i + 1} \ge \frac{n}{3}.$$

116. [Suranyi] Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(n-1\right)\left(a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n\right) + n a_1 a_2 ... a_n \ge \left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)\left(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + ... + a_n^{n-1}\right).$$

Miklos Schweitzer Competition

117. [Gabriel Dospinescu] Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thỏa mãn điều kiện $x_1 x_2 ... x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} \left(x_i - x_j\right)^2 \ge \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n.$$

A generazation of Tukervici's Inequality

118. [Vasile Cirtoaje] Cho $a_1, a_2, ..., a_n < \frac{1}{n-1}$ và $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1, n > 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_1 a_2 ... a_n}{1 - \left(n-1\right) a_i}}.$$

119. [Vasile Cirtoaje] Cho $a_1, a_2, ..., a_n \in \left[0, 1\right)$ thỏa mãn điều kiện

$$a = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \ge \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{1 - a_1^2} + \frac{a_2}{1 - a_2^2} + ... + \frac{a_n}{1 - a_n^2} \ge \frac{na}{1 - a^2}.$$

120. [Vasile Cirtoaje, Mircea Lascu] Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$(a+b+c)(x+y+z)=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=4.$$

Chứng minh rằng

$$abcxyz<\frac{1}{36}.$$

121. [Gabriel Dospinescu] Cho $x_1,x_2,...,x_n>0,n>2$ thỏa mãn điều kiện $x_1x_2...x_n=1$. Tìm hằng số k_n nhỏ nhất sao cho

$$\frac{1}{\sqrt{1+k_nx_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+k_nx_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{1+k_nx_n}}\le n-1.$$

Mathlinks Contest

122. [Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu] Cho $x_1,x_2,...,x_n>0,n>2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=1$. Tìm hằng số k_n lớn nhất sao cho

$$(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n)\ge k_nx_1x_2...x_n.$$

123. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}.$$

IMO, 1995

124. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le 1.$$

IMO Shortlist, 1996

125. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+ab^2}{c^3}+\frac{1+bc^2}{a^3}+\frac{1+ca^2}{b^3}\ge\frac{18}{a^3+b^3+c^3}.$$

Hong Kong, 2000

126. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{1}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{1}{(c+1)^2+a^2+1}\le\frac{1}{2}.$$

127. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1.$$

IMO, 2000

128. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\ge\frac{3}{4}.$$

IMO Shortlist, 1998

129. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{1+c}+\frac{bc}{1+a}+\frac{ca}{1+b}\le\frac{1}{4}.$$

130. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\le 1.$$

Poland, 1999

131. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$a+b+c+\frac{1}{abc}\ge 4\sqrt{3}.$$

Macedonia, 1999

132. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{ab+c}+\sqrt{bc+a}+\sqrt{ca+b}\ge 1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}.$$

133. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$(1+a)(1+b)(1+c)\ge 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

Russia, 1991

134. Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\ge\frac{1}{3}.$$

Hungary, 1996

135. Cho các số thực x, y. Chứng minh rằng

$$3(x+y+1)^2+1\ge 3xy.$$

Columbia, 2001

136. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\ge\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Czech and Slovakia, 2000

137. Cho $a,b,c\ge 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\le\sqrt{c(ab+1)}.$$

Hong Kong, 1998

138. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3}{2}.$$

Korea, 1998

139. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1.$$

IMO, 2001

140. Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}.$$

IMO Shortlist, 1993

141. Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+cd+da=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}.$$

IMO Shortlist, 1990

142. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\geq 1\geq\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}.$$

Romania, 1997

143. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c.$$

Canada, 2002

144. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}.$$

USA, 1997

145. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}.$$

Belarus, 1999

146. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1.$$

Belarus, 1998

147. Cho $a,b,c\geq-\frac{3}{4}, a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\leq\frac{9}{10}.$$

Poland, 1996

148. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3z^3+x^6}\geq 2.$$

Roamania, 1997

149. Cho $x\geq y\geq z>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\ge x^2+y^2+z^2.$$

Vietnam, 1991

150. Cho $a\ge b\ge c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b}\ge 3a-4b+c.$$

Ukraine, 1992

151. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{xyz\left(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(xy+yz+zx\right)}\le\frac{3+\sqrt{3}}{9}.$$

Hong Kong, 1997

152. Cho $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n>0$ và $a_1+a_2+...+a_n<1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1a_2...a_n\left(1-a_1-a_2-...-a_n\right)}{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)\left(1-a_1\right)\left(1-a_2\right)...\left(1-a_n\right)}\le\frac{1}{n^{n+1}}.$$

IMO Shortlist, 1998

153. Cho hai số thực a,b, $a\ne 0$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}\ge\sqrt{3}.$$

Austria, 2000

154. Cho $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+...+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}\ge a_1+a_2+...+a_n.$$

China, 1984

155. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$x^2+y^2+z^2+x+y+z\ge 2\left(xy+yz+zx\right).$$

Russia, 2000

156. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz\ge xy+yz+zx$. Chứng minh rằng

$$xyz\ge 3\left(x+y+z\right).$$

India, 2001

157. Cho $x, y, z>1$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+y+z}\ge\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

IMO, 1992

158. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\le\frac{1}{abc}.$$

IMO Shortlist, 2004

159. Cho $x \geq 2, y \geq 2, z \geq 2$. Chứng minh rằng

$$\left(x^3+y\right)\left(y^3+z\right)\left(z^3+x\right) \geq 125xyz.$$

Saint Petersburg, 1997

160. Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $c^2+d^2=\left(a^2+b^2\right)^3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d} \geq 1.$$

Singapore, 2000

161. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

Czech – Slovak Match, 1999

162. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)} \geq \frac{a}{c+a}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+b}.$$

Moldova, 1999

163. Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a} \geq 4.$$

Baltic way, 1995

164. Cho x,y,u,v là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{xy+xu+uy+uv}{x+y+u+v} \geq \frac{xy}{x+y}+\frac{uv}{u+v}.$$

Poland, 1993

165. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

APMO, 1998

166. Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$x^2y+y^2z+z^2x \leq \frac{4}{27}.$$

Canada, 1999

167. Cho a,b,c,d,e,f là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a+b+c+d+e+f=1, ace+bdf \geq \frac{1}{108}.$$

Chứng minh rằng

$$abc+bcd+cde+def+efa+fab\le\frac{1}{36}.$$

Poland, 1998

168. Cho $a,b,c\in[0,1]$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\le a^2b+b^2c+c^2a+1.$$

Italy, 1993

169. Cho $a,b,c\ge 0, a+b+c\ge abc$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\ge abc.$$

Ireland, 1997

170. Cho $a,b,c\ge 0, a+b+c\ge abc$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\ge \sqrt{3}abc.$$

BMO, 2001

171. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=\sqrt{xyz}$. Chứng minh rằng

$$xy+yz+zx\ge 9(x+y+z).$$

Belarus, 1996

172. Cho x_1,x_2,x_3,x_4 là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x_1x_2x_3x_4=1$. Chứng minh rằng

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3\ge \max\left\{x_1+x_2+x_3+x_4,\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right\}.$$

Iran, 1997

173. Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\ge\frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$

Belarus TST, 2000

174. Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1.$$

Chứng minh rằng

$$abcd\ge 3.$$

Latvia, 2002

175. Cho $x,y,z>1$. Chứng minh rằng

$$x^{x^2+2yz}y^{y^2+2zx}z^{z^2+2xy}\ge (xyz)^{xy+yz+zx}.$$

Proposed for 1999 USAMO

176. Cho $c\ge b\ge a\ge 0$. Chứng minh rằng

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\ge 60abc.$$

Turkey, 1999

177. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$x^2+y^2+z^2\ge\sqrt{2}\left(xy+yz\right).$$

Macedonia, 2000

178. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{1+2bc}+\frac{b^2}{1+2ca}+\frac{c^2}{1+2ab}\ge\frac{3}{5}.$$

Bosnia and Hercegovina, 2002

179. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc\ge1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b^4+c^4}+\frac{1}{a^4+b+c^4}+\frac{1}{a^4+b^4+c}\le1.$$

Korea, 1999

180. Cho $a>b>c>0, x>y>z>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2x^2}{\left(by+cz\right)\left(bz+cy\right)}+\frac{b^2y^2}{\left(cz+ax\right)\left(cx+az\right)}+\frac{c^2z^2}{\left(ax+by\right)\left(ay+bx\right)}\ge\frac{3}{4}.$$

Korea, 2000

181. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge\frac{3}{2}.$$

Mediterranean, 2003

182. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a}\le1.$$

Moldova, 2002

183. Cho $\alpha,\beta,x_1,x_2,...,x_n>0, x_1+x_2+...+x_n=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1^3}{\alpha x_1+\beta x_2}+\frac{x_2^3}{\alpha x_2+\beta x_3}+...+\frac{x_n^3}{\alpha x_n+\beta x_1}\ge\frac{1}{n\left(\alpha+\beta\right)}.$$

Moldova TST, 2002

184. Cho a là một số thực dương, $x_1,x_2,...,x_n>0, x_1+x_2+...+x_n=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+...+\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1}\ge\frac{n^2}{2}.$$

Serbia, 1998

185. Cho $x,y\in\left[0,1\right]$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

Russia, 2000

186. Cho $x,y,z>0, xyz=1, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>x+y+z, k\in N^*$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k}>x^k+y^k+z^k.$$

Russia, 1999

187. Cho $x_n\ge x_{n-1}\ge x_{n-2}\ge ...\ge x_1>0, n\ge 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_nx_1}{x_2}+\frac{x_1x_2}{x_3}+...+\frac{x_{n-1}x_n}{x_1}\ge x_1+x_2+...+x_n.$$

Saint Petersburg, 2000

188. Cho $x_1,...,x_6\in[0,1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1^3}{x_2^5+x_3^5+...+x_6^5+5}+\frac{x_2^3}{x_3^5+x_4^5+...+x_1^5+5}+...+\frac{x_6^3}{x_1^5+x_2^5+...+x_5^5+5}\le\frac{3}{5}.$$

Ukraine, 1999

189. Cho $a_1,a_2,...,a_n>0$. Chứng minh rằng

$$\left(a_1^3+1\right)\left(a_2^3+1\right)...\left(a_n^3+1\right)\ge\left(a_1^2a_2+1\right)\left(a_2^2a_3+1\right)...\left(a_n^2a_1+1\right).$$

Czech – Slovak – Polish Match 2001

190. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a.\sqrt[3]{1+b-c}+b.\sqrt[3]{1+c-a}+c.\sqrt[3]{1+a-b}\le 1.$$

Japan, 2005

191. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\ge(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Iran, 2005

192. Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\ge\frac{a+b+c+d}{abcd}.$$

Austria, 2005

193. Cho $a,b,c\in[0,1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1}\le 2.$$

Poland, 2005

194. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}\le\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bosnia and Hercegovina, 2005

195. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\ge\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}.$$

Germany, 2005

196. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

Balkan, 2005

197. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=8$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{(a^3+1)(b^3+1)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(b^3+1)(c^3+1)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(c^3+1)(a^3+1)}}\ge\frac{4}{3}.$$

APMO, 2005

198. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1.$$

Baltic way, 2005

199. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz\ge 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^3}\ge 0.$$

IMO, 2005

200. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right)\ge\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)$$

Belarusian, 2005

201. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Chứng minh rằng

$$(a-1)(b-1)(c-1)\ge 8$$

Croatia, 2005

202. Cho x là số thực dương. Chứng minh rằng

$$1+x^{n+1}\ge\frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}.$$

Russia, 2005

203. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc\ge 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\le 1.$$

Romania, 2005

204. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{a}{(b+1)(c+1)}+\frac{a}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}.$$

Czech and Slovak, 2005

205. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=\frac{1}{3}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2-bc+1}+\frac{1}{b^2-ca+1}+\frac{1}{c^2-ab+1}\leq 3.$$

China, 2005

206. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{ab(1-c)}+\sqrt{bc(1-a)}+\sqrt{ca(1-b)}\leq\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Republic of Srpska, 2005

207. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\geq\sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}.$$

Serbia and Montenegro, 2005

208. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^4+b^4+c^4=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\leq 1.$$

Moldova, 2005

209. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$3.\sqrt[3]{\frac{1}{abc}+6(a+b+c)}\leq\frac{\sqrt[3]{3}}{abc}.$$

Slovenia TST, 2005

210. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a,b,c\geq 1$. Chứng minh rằng

$$(2+abc)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9.$$

211. [Huỳnh Tấn Châu] Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$xy\sqrt{xy}+yz\sqrt{yz}+zx\sqrt{zx}=1.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{x^6}{x^3+y^3}+\frac{y^6}{y^3+z^3}+\frac{z^6}{z^3+x^3}\geq\frac{1}{2}.$$

212. [Đặng Thanh Hải] Cho x là một số thực bất kì. Chứng minh rằng

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x<\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

213. [Ngô Văn Thái] Cho $x_1,x_2,...,x_n>0, n>2$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1^2+x_2x_3}{x_1\left(x_2+x_3\right)}+\frac{x_2^2+x_3x_4}{x_2\left(x_3+x_4\right)}+...+\frac{x_{n-1}^2+x_nx_1}{x_{n-1}\left(x_n+x_1\right)}+\frac{x_n^2+x_1x_2}{x_n\left(x_1+x_2\right)}\geq n.$$

214. [Nguyễn Duy Liên] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a,b,c\in[1,2]$. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leq 10.$$

215. [Lê Thanh Hải] Cho a,b,c d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{d^2}+\frac{d^2}{a^2}\geq\frac{a+b+c+d}{\sqrt[4]{abcd}}.$$

216. Cho $x\in[0,2]$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{4x-x^3}+\sqrt{x+x^3}\leq 3\sqrt[4]{3}.$$

217. Cho x là một số thực bất kì. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2}\sin x+\sqrt{15-10\sqrt{2}\cos x}\leq 6.$$

218. [Trần Văn Hạnh] Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$, $n\geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1-x^{2n}}+\frac{y}{1-y^{2n}}+\frac{z}{1-z^{2n}}\geq\frac{(2n+1)\sqrt[2n]{2n+1}}{2n}.$$

219. [Kiều Phương Chi] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}\leq\frac{1}{2}.$$

220. [Vũ Đức Cảnh] Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2=1$. Chứng minh rằng

$$(1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right)+(1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right)\geq 4+3\sqrt{2}.$$

221. [Ngô Văn Thái] Cho $a,b,c\in(0,1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}+(1-a)(1-b)(1-c).$$

222. [Nguyễn Văn Thông] Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\frac{3x}{x+1}+\frac{4y}{y+1}+\frac{2z}{z+1}=2.$$

Chứng minh rằng

$$x^3y^4z^2\leq\frac{1}{8^9}.$$

223. [Nguyễn Bá Nam] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)\geq\frac{3}{2}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right).$$

224. Cho x là một số thực bất kì. Chứng minh rằng

$$\left(16\cos^4 x+3\right)^4+768\geq 2048\cos x.$$

225. [Lê Quốc Hán] Cho x là một số thực bất kì. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{8}\leq\frac{(1+x)^8+16x^4}{\left(1+x^2\right)^4}\leq 17.$$

226. [Nguyễn Lê Dũng] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\leq 3\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

227. [Trần Xuân Đáng] Cho a,b,c là các số thực dương, $n\geq 2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[n]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[n]{\frac{c}{a+b}}>\frac{n}{n-1}\sqrt[n]{n-1}.$$

228. [Trịnh Bằng Giang] Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa điều kiện $x+y+z=1$, $n\geq 2$. Chứng minh rằng

$$x^n y+y^n z+z^n x\leq\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

229. [Nguyễn Văn Ngọc] Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$16xyz(x+y+z)\leq 3\sqrt[3]{(x+y)^4(y+z)^4(z+x)^4}.$$

230. [Nguyễn Bá Đang] Cho $x,y,z\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$. Chứng minh rằng

$$\left|\frac{\sin x-\sin y}{\sin z}+\frac{\sin y-\sin z}{\sin x}+\frac{\sin z-\sin x}{\sin y}\right|\leq\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

231. [Thái Nhật Phượng] Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{x+y+y^3z}+\frac{y^2}{y+z+z^3x}+\frac{z^2}{z+x+x^3y}\geq 3.$$

232. [Thái Nhật Phượng] Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+x^7+y^7}+\frac{y^2z^2}{y^2z^2+y^7+z^7}+\frac{z^2x^2}{z^2x^2+z^7+x^7}\leq 1.$$

233. [Trương Ngọc Đắc] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{\sqrt{abc}}{c+ab}\leq 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

234. [Nguyễn Minh Phương] Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=2007$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^{20}}{y^{11}}+\frac{y^{20}}{z^{11}}+\frac{z^{20}}{x^{11}}\geq 3.669^9.$$

235. [Phạm Thị Thanh Quỳnh] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}+\frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}+\frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}\le a+b+c\,.$$

236. [Lê Quang Nẫm] Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x,y,z\ge -1$ và $x^3+y^3+z^3\ge x^2+y^2+z^2$. Chứng minh rằng

$$x^5+y^5+z^5\ge x^2+y^2+z^2\,.$$

237. [Nguyễn Đễ] Cho $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\left|\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right|\ge 2$. Chứng minh rằng

$$\left|\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\right|\le\sqrt{5}\,.$$

238. [Huỳnh Tấn Châu] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b+c}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c+a}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a+b}}\ge\frac{3\sqrt{17}}{2}\,.$$

239. [Đỗ Thanh Hải] Cho x,y,z,t là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyzt=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^3\left(yz+zt+ty\right)}+\frac{1}{y^3\left(xz+zt+tx\right)}+\frac{1}{z^3\left(xt+ty+yx\right)}+\frac{1}{t^3\left(xy+yz+zx\right)}\ge\frac{4}{3}\,.$$

240. [Đỗ Bá Chủ] Cho $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_k>0, a_1+a_2+...+\ a_k\ge k;k,n\ge 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^n+a_2^n+...+a_k^n}{a_1^{n+1}+a_2^{n+1}+...+a_k^{n+1}}\le 1\,.$$

241. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc+a+c=b$. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}\le\frac{10}{3}\,.$$

Vietnam, 1999

242. [Đặng Thanh Hải] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\ge 2\left(\sqrt{\frac{c}{a+b}}+\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}\right).$$

243. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$a+b+c+abc\ge\frac{10\sqrt{3}}{9}\,.$$

244. [Phan Hoàng Vinh] Cho $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\in[0,1], n\ge 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{a_2a_3...a_n+1}+\frac{a_2}{a_1a_3...a_n+1}+...+\frac{a_n}{a_1a_2...a_{n-1}+1}\le n-1\,.$$

245. [Đào Mạnh Thắng] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge a^2b^2c^2\,.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a^2b^2}{c^3\left(a^2+b^2\right)}+\frac{b^2c^2}{a^3\left(b^2+c^2\right)}+\frac{c^2a^2}{b^3\left(c^2+a^2\right)}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

246. [Đỗ Ngọc Ánh] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$. Chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{1}{a^3}\right)\left(1+\frac{1}{b^3}\right)\left(1+\frac{1}{c^3}\right)\geq\frac{729}{512}.$$

247. [Trương Hoàng Hiếu] Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+1}{b^2+1}+\frac{b^2+1}{c^2+1}+\frac{c^2+1}{a^2+1}\leq\frac{7}{2}.$$

248. [Trần Tuấn Anh] Cho a,b,c là các số thực dương và $k\geq\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k+\left(\frac{b}{c+a}\right)^k+\left(\frac{c}{a+b}\right)^k\geq\frac{3}{2^k}.$$

249. [Trương Ngọc Đắc] Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^3+y^3}+\frac{1}{xy}\geq 4+2\sqrt{3}.$$

250. [Hồ Quang Vinh] Cho a,b,c,d là các số thực thỏa điều kiện $a^2+b^2=c+d=4$. Chứng minh rằng

$$ac+bd+cd\leq 4+4\sqrt{2}.$$

251. [Trương Ngọc Đắc] Cho x,y,z với $x=\max\{x,y,z\}$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{y}+\sqrt{1+\frac{y}{x}}+\sqrt[3]{1+\frac{z}{x}}\geq 1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}.$$

252. Cho a là số thực dương và x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng

$$a\left(x^2+y^2\right)+z^2\geq\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2}.$$

253. [Triệu Văn Hưng] Cho $a,b,c>1$. Chứng minh rằng

$$a^{\log_b c}+b^{\log_c a}+c^{\log_a b}\geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

254. [Phạm Văn Thuận] Cho x,y là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2=1$. Chứng minh rằng

$$xy+\max\{x,y\}\leq\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

255. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^6}{b^3+c^3}+\frac{b^3}{c^3+a^3}+\frac{c^6}{a^3+b^3}\geq\frac{1}{18}.$$

256. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{xy}{z+xy}}+\sqrt{\frac{yz}{x+yz}}+\sqrt{\frac{zx}{y+zx}}\le\frac{3}{2}.$$

257. [Trần Tuấn Anh] Cho x là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}\le\sqrt{x+9}.$$

258. Cho a,b là các số thực thỏa mãn điều kiện $a>b\ge 0$. Chứng minh rằng

$$2a+\frac{32}{(a-b)(2b+3)^2}\ge 5.$$

259. Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b=4$. Chứng minh rằng

$$2a+3b+\frac{6}{a}+\frac{10}{b}\ge 18.$$

260. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[5]{2a+b}+\sqrt[5]{2b+c}+\sqrt[5]{2c+a}\le 3\sqrt[5]{3}.$$

261. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(x+y+z)^6\ge 432xy^2z^3.$$

262. Cho $a\in[0,1]$. Chứng minh rằng

$$13.\sqrt{a^2-a^4}+9.\sqrt{a^2+a^4}\le 16.$$

263. Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(2+\frac{3a}{5b}\right)\left(2+\frac{3b}{5c}\right)\left(2+\frac{3c}{5d}\right)\left(2+\frac{3d}{5a}\right)\ge\frac{28561}{625}.$$

264. Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d\le 1$. Chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(1+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\left(1+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)\ge 9^4.$$

265. Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abcd\ge 16$. Chứng minh rằng

$$\left(a+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(b+\frac{2}{c}+\frac{1}{d}\right)\left(c+\frac{2}{d}+\frac{1}{a}\right)\left(d+\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge\frac{2401}{16}.$$

266. Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b\le 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}\ge 20.$$

267. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c\le 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{81}{2}.$$

268. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[5]{(2a+b)(a+c)a}+\sqrt[5]{(2b+c)(b+a)b}+\sqrt[5]{(2c+a)(c+b)c}\le 3\sqrt[5]{6}.$$

269. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\left(a^2+a+2\right)(b+1)^2\left(c^2+3c\right)=64$. Chứng minh rằng

$$a^3b^4c^5 \le 1.$$

270. [Trần Hồng Sơn] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c\le \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng

$$\left(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(3+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(3+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\ge 343.$$

271. Cho a,b,c,m,n,p là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c\le 1, m+n+p\le \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{2}{a}+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{2}{b}+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{c}+\frac{1}{p}\right)\ge 9^3.$$

272. [Phùng Văn Sự] Cho x,y,z là các số thực. Chứng minh rằng

$$27\left(x^2+3\right)\left(y^2+3\right)\left(z^2+3\right)\ge 4\left(3xy+3yz+3zx\right)^2.$$

273. [Trần Anh Đức] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}+\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}+\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\frac{c^2+a^2}{b^2+ac}\ge \frac{9}{2}.$$

274. [Lê Thanh Hải] Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{1+b}+\frac{b^3}{1+a}\ge 1.$$

275. [Dương Châu Dinh] Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x+y+z=2$. Chứng minh rằng

$$2\left(x^3+y^3+z^3\right)\le 2+\left(x^4+y^4+z^4\right).$$

276. [Nguyễn Tất Thu] Cho a,b,c, α là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+\frac{1}{ab}\right)^{\alpha}+\left(b^2+\frac{1}{bc}\right)^{\alpha}+\left(c^2+\frac{1}{ca}\right)^{\alpha}\ge 3.2^{\alpha}.$$

277. [Trần Xuân Đáng] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 2(1+a+b+c).$$

278. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(xyz+1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\ge x+y+z+6.$$

279. [Đàm Văn Nhỉ] Cho $a,b,c,d\in[0,1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{bcd+1}+\frac{b}{cda+1}+\frac{c}{dab+1}+\frac{d}{abc+1}\le 3.$$

280. [Cao Xuân Nam] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^8}{\left(a^2+b^2\right)^2}+\frac{b^8}{\left(b^2+c^2\right)^2}+\frac{c^8}{\left(c^2+a^2\right)^2}\geq\frac{1}{12}.$$

281. [Trần Hồng Sơn] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c\leq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}+27\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\geq 84.$$

282. [Dương Châu Dinh] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$6\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\leq 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{10a+b+c}+\frac{1}{a+10b+c}+\frac{1}{a+b+10c}\leq\frac{1}{12}.$$

283. [Lê Văn Quang] Cho a,b,c,d,e,f là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$ab+bc+cd+de+ef=1.$$

Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2\geq\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{7}}.$$

284. [Cao Minh Quang] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^3+a^2+1}+\frac{b}{b^3+b^2+1}+\frac{c}{c^3+c^2+1}\leq\frac{27}{31}.$$

285. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x+y+z}{3\sqrt{3}}\geq\frac{xy+yz+zx}{\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}}.$$

286. [Walther Janous] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a^4+b^4+3\geq a+b+3.\frac{3ab+1}{4}.\sqrt[3]{\frac{3ab+1}{4}}.$$

287. [Trần Thị Thuận] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\geq\frac{3}{abc+1}.$$

288. Cho x,y,z là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$8\left(x^3+y^3+z^3\right)^2\geq 9\left(x^2+yz\right)\left(y^2+zx\right)\left(z^2+xy\right).$$

289. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2-z^2}{y+z}+\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{z^2-y^2}{x+y}\geq 0.$$

290. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\left(x^x+y^y\right).$$

291. [Nguyễn Hữu Bằng] Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\geq 9.$$

292. [Cao Minh Quang] Cho 10 số thực không âm $a_i, b_i\ (i=1,2,...,5)$ thỏa mãn điều kiện $a_i^2+b_i^2=1\ (i=1,2,...,5)$ và $a_1^2+a_2^2+...+a_5^2=1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}.$$

293. Cho x, y, z là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\left[(x+y)(y+z)(z+x)\right]^2\geq xyz(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y)$$

294. [Vedula N. Murty] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{3}\leq\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{abc}}.$$

295. [Cao Minh Quang] Cho $x_1,x_2,...,x_n>0, x_1+x_2+...+x_n=2n, n\geq 3$. Chứng minh rằng

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{x_j}{\sqrt{x_i^3+1}}\geq\frac{2n(n-1)}{3}.$$

296. Cho hàm số $f:[1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\int_1^x\frac{dt}{t+2002t^{2002}}$. Chứng minh rằng với các số thực $x_1,x_2,...,x_n\geq 1$, ta có

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}\leq\ln\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}.$$

297. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $0\leq a\leq b\leq c\leq 3$. Chứng minh rằng

$$(a-b)(a^2-9)+(a-c)(b^2-9)+(b-c)(c^2-9)\leq 36.$$

298. Cho các số thực $a_1,a_2,...,a_n$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a_1^3+a_2^3+...+a_n^3}\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}.$$

Nordic, 1990

299. Cho các số thực $x_1,x_2,...,x_n\ (n\geq 2)$ thỏa mãn các điều kiện $x_1+x_2+...+x_n\geq 0$ và $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=1$. Đặt $M=\max\{x_1,x_2,...,x_n\}$. Chứng minh rằng

$$M\geq\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

Nordic, 1995

300. Cho $a_1,a_2,...,a_n\ (n\geq 1)$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\geq\left(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n}\right)\left(n+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Nordic, 1999

301. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho với các số thực $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$, ta luôn có bất đẳng thức

$$x_1 x_2 ... x_n + y_1 y_2 ... y_n \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + ... + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}.$$

Poland, 2002

302. Cho $x_1, x_2, ..., x_n \ (n \ge 3)$ là các số thực dương. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau là đúng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \ge \frac{n}{2}, \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1} + x_{i-2}} \ge \frac{n}{2}.$$

(ở đây ta xem $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2, x_0 = x_n, x_{-1} = x_{n-1}$)

Poland, 2002

303. Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2(a^2 + b^2)} + \sqrt{2(b^2 + c^2)} + \sqrt{2(c^2 + a^2)} \ge \sqrt{3(a+b)^2 + 3(b+c)^2 + 3(c+a)^2}.$$

Poland, 2004

304. Cho a, b là các số thực dương và các số thực $x_i, y_i \in [0,1], i = 1, 2, ..., n \ (n \ge 1)$ thỏa mãn các điều kiện $x_1 + x_2 + ... + x_n \le a, y_1 + y_2 + ... + y_n \le b$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n.$$

Poland, 2005

305. Cho các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ và số thực $c > -2$. Chứng minh rằng nếu

$$\sqrt{x_1^2 + c x_1 x_2 + x_2^2} + \sqrt{x_2^2 + c x_2 x_3 + x_3^2} + ... + \sqrt{x_n^2 + c x_n x_1 + x_1^2} = \sqrt{c+2}\,(x_1 + x_2 + ... + x_n)$$

thì $c = 2$ hoặc $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Poland, 2005.

306. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \ge 1.$$

Poalnd, 2006

307. Cho $\frac{1}{2} \le a, b, c \le 1$. Chứng minh rằng

$$2 \le \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b} \le 3.$$

308. Cho $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ và $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin^n a + \sin^n b}{(\sin a + \sin b)^n} \ge \frac{\sin^n 2a + \sin^n 2b}{(\sin 2a + \sin 2b)^n}.$$

309. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$(-a+b+c)(a-b+c) + (a-b+c)(a+b-c) + (a+b-c)(-a+b+c) \le \sqrt{abc}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right).$$

Romania TST, 2002

310. Cho $a_1, a_2, ..., a_n \ (n \ge 3)$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{a_2^2 + 1} + \frac{a_2}{a_3^2 + 1} + ... + \frac{a_n}{a_1^2 + 1} \ge \frac{4}{5}\left(a_1\sqrt{a_1} + a_2\sqrt{a_2} + ... + a_n\sqrt{a_n}\right)^2.$$

Romania TST, 2002

311. Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $1 \le x^2 - xy + y^2 \le 2$. Chứng minh rằng

a) $\frac{2}{9} \le x^4 + y^4 \le 8$,

b) $x^{2n} + y^{2n} \ge \frac{2}{3^n}, n \ge 3$.

312. Cho $x_1, x_2, ..., x_{n-1} (n \ge 3)$ là các số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} = 2$ và $x_1 + 2x_2 + ... + (n-1)x_{n-1} = 2n - 2$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n-1} k(2n-k)x_k.$$

313. [V. Senderov] Cho $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ và m, n là các số tự nhiên sao cho $n > m$. Chứng minh rằng

$$2\left|\sin^n x - \cos^n x\right| \le 3\left|\sin^m x - \cos^m x\right|.$$

314. [S. Berlov] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \ge \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

315. Cho $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$\sin\sqrt{x} \le \sqrt{\sin x}.$$

316. [D. Tereshin] Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)^2 \ge 3\left(a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}\right).$$

317. Cho $x_1, x_2, ..., x_n (n \ge 4)$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1}{x_n + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + ... + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1} \ge 2.$$

Xác định điều kiện xảy ra đẳng thức khi $n = 4$.

318. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$3(a+b+c+d) + 4(abc + bcd + cda + dab) = 8.$$

Chứng minh rằng

$$ab + ac + bc + ad + bd + cd \le 2.$$

319. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 \le y + z, y^2 \le z + x, z^2 \le x + y$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của z.

Serbia and Montenegro, 2002

320. Cho a, b, c là các số thực dương và n, k là các số tự nhiên. Chứng minh rằng

$$\frac{a^{n+k}}{b^n} + \frac{b^{n+k}}{c^n} + \frac{c^{n+k}}{a^n} \ge a^k + b^k + c^k.$$

321. [R. Sanojevic] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{c} + \frac{1}{2}}} \ge \sqrt{2}.$$

Serbia and Montenegro, 2004

322. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$xy + yz + zx \ge 4\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) + 5xyz.$$

Serbia and Montenegro, 2006

323. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{y^2+z}+\frac{y}{z^2+x}+\frac{z}{x^2+y}\ge\frac{9}{4}.$$

Serbia and Montenegro, 2006

324. Chứng minh rằng

$$\sqrt[44]{\tan 1^0 \tan 2^0 \ldots \tan 44^0}<\tan 22^0 30'<\frac{1}{44}\left(\tan 1^0+\tan 2^0+\ldots+\tan 44^0\right).$$

325. Cho a,b,c,d,e,f là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}+\frac{ef}{e+f}\le\frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}.$$

Yugolavia, 1985

326. Cho $a\ge 1, b\ge 1$. Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{a^2-b^2}{8}\right)^2+\frac{ab}{a+b}\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2}{8}}.$$

Yugolavia, 1991

327. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{ab}\le\frac{(a-b)^2}{4\sqrt{ab}}.$$

Yugolavia, 1993

328. Cho các số thực x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Hãy xác định giá trị lớn nhất của số thực a để

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\ge a\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5\right).$$

Yugolavia, 1996

329. [Đ. Dugosija] Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng ít nhất hai trong ba số $2a-\frac{1}{b}, 2b-\frac{1}{c}, 2c-\frac{1}{a}$ đều lớn hơn 1.

Serbia and Montenegro TST, 2004

330. Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\ge 2.$$

Yugolavia TST, 1985

331. Cho $a>b>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}.$$

Sweden, 1985

332. Cho $x_1, x_2, x_3, x_4\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1x_2x_3x_4}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)}\le\frac{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4}{(1-x_1)^4+(1-x_2)^4+(1-x_3)^4+(1-x_4)^4}.$$

Taiwan, 2002

333. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^5}{x_1+x_2+\ldots+x_n-x_i}.$$

Turkey TST, 1997

334. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{1}{a}-1}\sqrt{\frac{1}{b}-1}+\sqrt{\frac{1}{b}-1}\sqrt{\frac{1}{c}-1}+\sqrt{\frac{1}{c}-1}\sqrt{\frac{1}{a}-1}\geq 6.$$

335. Cho $x\in\left(0,\frac{\pi}{2n}\right), n\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin 2x}{\sin x}+\frac{\sin 3x}{\sin 2x}+...+\frac{\sin(n+1)x}{\sin nx}<2\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Ukraina TST, 1999

336. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{27}{13}.$$

Swiss TST, 2003

337. Cho $a_1,a_2,...,a_n$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a_1a_2...a_n=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}\leq a_1+a_2+...+a_n.$$

338. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+4abc\leq\frac{1}{2}.$$

Italy, 1990

339. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{9}{a+b+c}\leq 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Irish, 1998

340. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\leq a^2+b^2+c^2-3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\leq(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Irish, 2005

341. Cho $0<a,b,c<1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-c}+\frac{c}{1-c}\geq\frac{3\sqrt[3]{abc}}{1-\sqrt[3]{abc}}.$$

Irish, 2002

342. Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $xyz=-1$. Chứng minh rằng

$$x^4+y^4+z^4+3(x+y+z)\geq\frac{x^2}{y}+\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{z^2}{y}.$$

Iran, 2004

343. Cho $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1^3}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}+\frac{x_2^3}{x_2^2+x_2x_3+x_3^2}+...+\frac{x_n^3}{x_n^2+x_nx_1+x_1^2}\geq\frac{x_1+x_2+...+x_n}{3}.$$

Hungary – Israel Competition, 2003

344. Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=1$. Chứng minh rằng

$$6\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\geq\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+\frac{1}{8}.$$

Hong Kong, 2006

345. Cho $a_1,a_2,...,a_{n+1}$ $(n\geq 2)$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a_2-a_1=a_3-a_2=...=a_{n+1}-a_n.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}+...+\frac{1}{a_n^2}\le\frac{n-1}{2}.\frac{a_1a_n+a_2a_{n+1}}{a_1a_2a_na_{n+1}}.$$

Hong Kong, 2004

346. Cho $x,y,z>0,k>2,a=x+ky+kz,b=kx+y+kz,c=kx+ky+z$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\ge\frac{3}{2k+1}.$$

Greek TST, 1998

347. Cho x,y,z là các số thực. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2-y^2}{2x^2+1}+\frac{y^2-z^2}{2y^2+1}+\frac{z^2-x^2}{2z^2+1}\le 0.$$

Greek TST, 2005

348. Cho x,y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2+xy+y^2=1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$K=x^3y+xy^3.$$

Greek , 2006

349. Cho α,β,γ là các số thực thỏa mãn điều kiện $\beta\gamma\ne 0,\frac{1-\gamma^2}{\beta\gamma}\ge 0$. Chứng minh rằng

$$10\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma^3\right)\ge 2\alpha\beta+5\alpha\gamma.$$

Greek , 2002

350. Cho α,β,x,y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\alpha+\beta=1$. Chứng minh rằng

$$(\alpha x+\beta y)\left(\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}\right)\ge 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Greek , 2001

351. Cho x,y là các số thực dương. Hãy xác định số k lớn nhất để

$$\frac{xy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(3x^2+y^2\right)}}\le\frac{1}{k}.$$

Greek , 2000

352. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a<b<c,a+b+c=6,ab+bc+ca=9$. Chứng minh rằng

$$0<a<1<b<3<c<4.$$

Britain, 1995

353. Cho $0\le x,y,z\le 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức

$$S=x^2y-y^2x,P=x^2y+y^2z+z^2x-x^2z-y^2x-z^2y.$$

Britain, 1995

354. Cho a,b,c,d,e là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4+\left(\frac{b}{c}\right)^4+\left(\frac{c}{d}\right)^4+\left(\frac{d}{e}\right)^4+\left(\frac{e}{a}\right)^4\ge\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{e}{d}+\frac{a}{e}.$$

Britain, 1984

355. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng

$$x^2yz+xy^2z+xyz^2\le\frac{1}{3}.$$

Britain, 2004

356. Cho $a,b,c,p,q,\alpha\in(0,1)$.

a) Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của $f\left(x\right)=\frac{x^{\alpha+1}}{c^{\alpha}}+\frac{\left(1-x\right)^{\alpha+1}}{\left(1-c\right)^{\alpha}}, \forall x\in\left(0,1\right)$.

b) Chứng minh rằng $\frac{a^{\alpha+1}}{p^{\alpha}}+\frac{b^{\alpha+1}}{q^{\alpha}}\geq\frac{\left(a+b\right)^{\alpha+1}}{\left(p+q\right)^{\alpha}}$.

Bulgarian, 1984

357. Cho x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là các số thực dương. Hãy xác định số C bé nhất để

$$C\left(x_1^{2005}+x_2^{2005}+...+x_5^{2005}\right)\geq x_1x_2x_3x_4x_5\left(x_1^{125}+x_2^{125}+...+x_5^{125}\right)^{16}.$$

Brasil, 2005

358. Cho a, x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$x\frac{a+z}{a+x}+y\frac{a+x}{a+y}+z\frac{a+y}{a+z}\leq x+y+z\leq x\frac{a+y}{a+z}+y\frac{a+z}{a+x}+z\frac{a+x}{a+y}.$$

359. Cho $n\geq 2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4...\sqrt[n]{n}}}}<2.$$

Austria, 1990

360. Cho a,b,c,d là các số thực. Chứng minh rằng

$$a^6+b^6+c^6+d^6+2\geq 6abcd.$$

Austria, 2004

361. Cho a,b,c là các số thực. Chứng minh rằng

$$\min\left\{\left(a-b\right)^2,\left(b-c\right)^2,\left(c-a\right)^2\right\}\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Italy, 1992

362. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn các điều kiện $a^2\leq b^2+c^2, b^2\leq c^2+a^2$, $c^2\leq a^2+b^2$. Chứng minh rằng

$$\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq 4\left(a^6+b^6+c^6\right).$$

Japan, 2001

363. Cho $n\geq 2$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{n-k}.\frac{1}{2k-1}<4.$$

Japan, 1992

364. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{4}\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right).$$

Mediteranean, 2002

365. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca+2abc=1$. Chứng minh rằng

$$2\left(a+b+c\right)+1\geq 32abc.$$

Mediteranean, 2004

366. Cho a,b,c là các số khác 0; x, y, z là các số thực dương thỏa điều kiện $x+y+z=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\geq\frac{x}{1+a^2}+\frac{y}{1+b^2}+\frac{z}{1+c^2}.$$

Mediteranean, 1999

367. Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n}}-\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}\ge\frac{1}{n}.$$

368. Cho $n\ge 2$. Chứng minh rằng

$$\log_2 3+\log_3 4+...+\log_n(n+1)<n+\ln n-0,9.$$

369. Cho $x,y\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$. Chứng minh rằng

$$y\sqrt{3-2x}+x\sqrt{3-2y}\le x^2+y^2.$$

Moldova, 2001

370. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+1\ge 4(ab+bc+ca).$$

Moldova, 2002

371. Cho n là một số tự nhiên và x là một số thực. Chứng minh rằng

$$|\cos x|+|\cos 2x|+|\cos 4x|+...+|\cos 2^n x|\ge\frac{n}{2\sqrt{2}}.$$

372. [V. Yasinsky] Cho $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$\alpha+\beta+\gamma\ge\alpha\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\beta\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\gamma\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

373. [V. Yasinsky] Cho $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$\alpha+\beta+\gamma\ge\alpha\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{2\sin\alpha}+\beta\frac{\sin\gamma+\sin\alpha}{2\sin\beta}+\gamma\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2\sin\gamma}.$$

374. [M. Kurylo] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^6}{b^2+c^2}+\frac{b^6}{c^2+a^2}+\frac{c^6}{a^2+b^2}\ge\frac{abc(a+b+c)}{2}.$$

375. [M. Kurylo] Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a(b+1)yz}+\sqrt[3]{b(c+1)zx}+\sqrt[3]{c(a+1)xy}\le\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

376. [V. Brayman] Cho $0\le a,b,c<\frac{1}{\sqrt{3}}$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{1-ab}+\frac{b+c}{1-bc}+\frac{c+a}{1-ca}\le 2\frac{a+b+c-abc}{1-ab-bc-ca}.$$

377. [O. Kukush, R. Ushakov] Cho $n\ge 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{...+\sqrt{2n-1}}}}}<2.$$

378. [V. Gavran] Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a}{c}(a+b-c)+\frac{c}{b}(c+a-b)+\frac{b}{a}(b+c-a).$$

379. [R. Ushakov] Cho $n\ge 2, p\ge 3$. Chứng minh rằng

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^p}\right)>\frac{p}{p+1}$$

380. [Prymak] Cho $x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1^3}{y_1^2}+\frac{x_2^3}{y_2^2}+...+\frac{x_n^3}{y_n^2}\geq\frac{\left(x_1+x_2+...+x_n\right)^3}{\left(y_1+y_2+...+y_n\right)^2}.$$

381. [D. Mitin] Cho $x,y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Chứng minh rằng

$$\frac{\cos x\cos y-4}{\cos x+\cos y-4}\leq 1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x+y}{\cos x+\cos y-4}\right).$$

382. [D. Mitin] Cho $x_1,x_2,...,x_n\neq 0$, $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+...+\frac{x_n}{x_1}=0$. Chứng minh rằng

$$\left|x_1x_2+x_2x_3+...+x_nx_1\right|\leq\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|x_k\right|-\min_{1\leq k\leq n}\left|x_k\right|\right)\left(\left|x_1\right|+\left|x_2\right|+...+\left|x_n\right|\right).$$

383. [V. Yasinskyy] Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn các điều kiện $a+b+c=2$ và $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\max\left\{a,b,c\right\}-\min\left\{a,b,c\right\}\leq\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

384. [V. Brayman] Cho $1\leq a,b,c,d\leq 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{3}\leq\frac{a}{b+cd}+\frac{b}{c+da}+\frac{c}{d+ab}+\frac{d}{a+bc}\leq 2.$$

385. [O. Makarchuk] Cho $a,b,c>1$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng

$$\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)\leq 8.$$

386. [V. Yasinskyy] Cho x,y,z là các số thực thỏa điều kiện $\left|x+y+z\right|\leq 1,\left|x-y+z\right|\leq 1$, $\left|4x+2y+z\right|\leq 8,\left|4x-2y+z\right|\leq 8$. Chứng minh rằng

$$\left|x\right|+3\left|y\right|+\left|z\right|\leq 7.$$

387. [O. Rybak] Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^4+\frac{b^4}{2}+\frac{c^4}{2}}+\sqrt{b^4+\frac{c^4}{2}+\frac{a^4}{2}}+\sqrt{c^4+\frac{a^4}{2}+\frac{b^4}{2}}\geq\sqrt{a^4+b^3c}+\sqrt{b^4+c^3a}+\sqrt{c^4+a^3b}.$$

388. [Cezar Lupu] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{a^2+bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2+ca}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^2+ab}{(c+a)(c+b)}.$$

389. [Daniel Campos Salas] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a+b+c+1=4abc.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

390. [Bogdan Enescu] Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn các điều kiện

$$\cos x+\cos y+\cos z=0,\cos 3x+\cos 3y+\cos 3z=0.$$

Chứng minh rằng

$$\cos 2x.\cos 2y.\cos 2z\leq 0.$$

391. [Phạm Hữu Đức] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}\geq\sqrt{6.\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}}.$$

392. [Vasile Cartoaje] Cho a,b,c,d là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$a^2+b^2+c^2+d^2=4.$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{2}(4-ab-bc-cd-da)\geq(\sqrt{2}+1)(4-a-b-c-d).$$

393. [Hồ Phú Thái] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+2bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+2ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+2ab}}\leq\frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

394. [Gabriel Dospinescu] Cho $a_1,a_2,...,a_5$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a_1a_2a_3a_4a_5=a_1(1+a_2)+a_2(1+a_3)+...+a_5(1+a_1)+2.$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}.$$

395. Cho x_1,x_2,x_3,x_4 là các số thực thỏa mãn các điều kiện

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0, x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3.$$

396. [Cezar Lupu] Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+abc}{b+c}+\frac{b^3+abc}{c+a}+\frac{c^3+abc}{a+b}\geq a^2+b^2+c^2.$$

397. [Titu Andresscu] Cho ABC là tam giác nhọn. Chứng minh rằng

$$\cos^3A+\cos^3B+\cos^3C+\cos A\cos B\cos C\geq\frac{1}{2}.$$

398. [Phạm Hữu Đức] Cho a,b,c là các số thực không âm nhưng không có hai số nào trong ba số đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}}\geq\frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}.$$

399. [Titu Andresscu] Cho a,b,c là các số thực. Chứng minh rằng

$$3(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\geq a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3.$$

400. [Darij Grinberg] Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\cos\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}\cot\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\cot\frac{C}{2}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right).$$

401. [Marian Tetiva] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

a) Nếu $a\leq b\leq 1\leq c$ thì $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$.

b) Nếu $a\leq 1\leq b\leq c$ thì $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$.

402. [Vasile Cartoaje] Cho x,y,z là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$x^4(y+z)+y^4(z+x)+z^4(x+y)\leq\frac{1}{12}(x+y+z)^5.$$

403. [Zdravko F. Starc] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$a(b^2-\sqrt{b})+b(c^2-\sqrt{c})+c(a^2-\sqrt{a})\geq 0.$$

404. [Ivan Borsenco] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca)^3\leq 3(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2).$$

405. [Nikolai Nikolov] Cho $0<y<x<1, 0<z<1$. Chứng minh rằng

$$\left(x^z-y^z\right)\left(1-x^zy^z\right)>\frac{x-y}{1-xy}.$$

406. [Bogdan Enescu] Cho a,b là hai số thực phân biệt thỏa mãn điều kiện

$$|a-1|+|b+1|=|a|+|b|=|a-1|+|b+1|.$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|a+b|$.

407. [Iurie Boreico, Marcel Teleucă] Cho $x_1,x_2,...,x_n\geq\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2x_i}{3}\right)^{x_i}\geq\left(\frac{4}{3}\right)^n\sqrt[4]{\left(x_1+x_2\right)\left(x_2+x_3\right)...\left(x_{n-1}+x_n\right)\left(x_n+x_1\right)}.$$

408. [Iurie Boreico, Ivan Borsenco] Cho a,b,c là các số thực dương phân biệt. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}\geq\frac{16abc}{\left(a+b+c\right)^2}.$$

409. [Titu Andreescu] Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $3\left(a+b\right)\geq 2|ab+1|$. Chứng minh rằng

$$9\left(a^3+b^3\right)\geq\left|a^3b^3+1\right|.$$

410. [Titu Andreescu] Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$3\left(a^2-ab+b^2\right)\left(c^2-cd+d^2\right)\geq 2\left(a^2c^2-abcd+b^2d^2\right).$$

411. [Ivan Borsenco] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

a) $\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\geq\left(a^4+b^4+c^4\right)\left(ab+bc+ca\right)$.

b) $9\left(a^4+b^4+c^4\right)^2\geq\left(a^5+b^5+c^5\right)\left(a+b+c\right)^3$.

412. [Titu Andreescu] Cho a,b là các số thực thỏa mãn điều kiện $9a^2+8ab+7b^2\leq 6$. Chứng minh rằng

$$7a+5b+12ab\leq 9.$$

413. [Phạm Hữu Đức] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

414. [Cezar Lupu] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3\left(b+c\right)}+\frac{1}{b^3\left(c+a\right)}+\frac{1}{c^3\left(a+b\right)}+\frac{4\left(ab+bc+ca\right)}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}\geq ab+bc+ca.$$

415. [Bin Zhao] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2}{4a^2+ab+4b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{4b^2+bc+4c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{4c^2+ca+4a^2}}\leq 1.$$

416. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a\geq 1,a+b+c=0$. Chứng minh rằng

$$a^4+b^4+c^4-3abc.$$

417. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc\leq 8$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\geq 1.$$

418. Cho $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $S=\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-1+x_i}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+S-x_i}.$$

419. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $(x+y-z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)=4$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$E(x,y,z)=\left(x^4+y^4+z^4\right)\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{z^4}\right).$$

420. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2}+\frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c+a)^2}\geq\frac{5}{2}.$$

421. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a+b}{b+1}}+\sqrt{\frac{b+c}{c+1}}+\sqrt{\frac{c+a}{a+1}}\geq 3.$$

422. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông. Hãy tìm giá trị lớn nhất của số thực k để

$$a^3+b^3+c^3\geq k(a+b+c)^3.$$

Iran, 2006

423. Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$. Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\right)\leq\frac{n^2}{\sqrt{n+1}}.$$

China TST, 2006

424. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}}+\frac{yz}{\sqrt{yz+zx}}+\frac{zx}{\sqrt{zx+xy}}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

China TST, 2006

425. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq a^2+b^2+c^2.$$

Romania TST, 2006

426. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\geq\frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right).$$

Junior Balkan TST, 2006

427. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 3\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Junior Balkan TST, 2006

428. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{27}{4}(x+y)(y+z)(z+x)\geq\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\right)^2\geq 6\sqrt{3}.$$

Turkey TST, 2006

429. Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n\geq 3)$ là các số thực. Giả sử rằng ta có

$$\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2 \geq 4\left(a_1a_2+a_2a_3+...+a_na_1\right).$$

a) Tìm tất cả các giá trị của n để bất đẳng thức trên đúng khi $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương.

b) Tìm tất cả các giá trị của n để bất đẳng thức trên đúng khi $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực bất kì.

Italy, 2006

430. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a+2b}{a+2c}\right)^3+\left(\frac{b+2c}{b+2a}\right)^3+\left(\frac{c+2a}{c+2b}\right)^3 \geq 3.$$

MOP, 2004

431. Cho $k \in \mathbb{Z}^+$, $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a_1+a_2+...+a_n=1$. Chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1-a_i^k}{a_i^k} \geq \left(n^k-1\right)^n.$$

432. Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a_1+a_2+...+a_n=1$. Chứng minh rằng

$$a_1a_2+a_2a_3+...+a_{n-1}a_n \leq \frac{1}{4}.$$

433. Cho $a_1, a_2, ..., a_n \left(n>1\right)$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a_1a_2...a_n=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_n+n}{4}.$$

434. [Aaron Pixton] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$5+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

435. [Mildorf] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{4a^3+4b^3}+\sqrt[3]{4b^3+4c^3}+\sqrt[3]{4c^3+4a^3} \leq \frac{4a^2}{a+b}+\frac{4b^2}{b+c}+\frac{4c^2}{c+a}.$$

436. [Po – Ru Loh] Cho $a, b, c>1$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \leq 1.$$

437. [Weighao Wu] Cho $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$\left(\sin x\right)^{\sin x} < \left(\cos x\right)^{\cos x}.$$

438. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$1<\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

439. [Gabriel Dospinescu] Cho $a_1, a_2, ..., a_n \left(n>1\right)$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a_1a_2...a_n=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a_1^2+1}{2}}+\sqrt{\frac{a_2^2+1}{2}}+...+\sqrt{\frac{a_n^2+1}{2}} \leq a_1+a_2+...+a_n.$$

440. [Vascile Cartoaje] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{ab+1}+\frac{b}{bc+1}+\frac{c}{ca+1}\geq\frac{3}{2}.$$

441. Cho x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $\sum_{i<j}\left|x_i-x_j\right|=1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\sum_{i=1}^{5}x_i.$$

442. Cho $x_1,x_2,x_3,x_4\in[-1,1]$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F=\sum_{i=1}^{4}x_i-\left(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\right)+\left(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4\right)-\prod_{i=1}^{4}x_i.$$

443. Cho $a,b,c\in[0,1]$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a(1-b)(1-c)}+\sqrt{b(1-c)(1-a)}+\sqrt{c(1-a)(1-b)}\leq 1+\sqrt{abc}.$$

444. [Cao Minh Quang] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{a+b+c}.$$

445. [Cao Minh Quang] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2(b+1)}{a+b+ab}+\frac{b^2(c+1)}{b+c+ca}+\frac{c^2(a+1)}{c+a+ca}\geq 2.$$

446. [Cao Minh Quang] Cho $x_1,x_2,...,x_n\ (n\geq 2)$ là n số thực dương thỏa điều kiện

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i+2}\leq 1.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1}\geq\frac{n(n-1)}{n+1}.$$

447. [Cao Minh Quang] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{3a^2+2b+3}+\frac{bc}{3b^2+2c+3}+\frac{ca}{3c^2+2a+3}\leq\frac{1}{12}.$$

448. Cho $x_1,x_2,...,x_{2n}$ là các số thực thỏa mãn điều kiện $\left|x_{i+1}-x_i\right|\leq 1, i=1,2,...,2n-1$. Chứng minh rằng

$$|x_1|+|x_2|+...+|x_{2n}|+|x_1+x_2+...+x_{2n}|\leq n(n+1).$$

Romania TST, 2000

449. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$3\left(a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}\right)\leq 4(a+b+c).$$

450. [Rumen Kozarev] Cho $x\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$x\left(2.3^x-\frac{4x^2+x+2}{x^2+x+1}\right)\geq 0.$$

451. Cho $0\leq x_i\leq 1, i=1,2,...,n\ (n\geq 2)$. Chứng minh rằng

$$\left(x_1+x_2+...+x_n\right)-\left(x_1x_2+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n+x_nx_1\right)\leq\left[\frac{n}{2}\right].$$

Bulgaria, 1995

452. Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^4+c^4}+\sqrt{a^4+d^4}+\sqrt{b^4+c^4}+\sqrt{b^4+d^4}\geq 2\sqrt{2}\left(ad+bc\right).$$

Turkey, 2006

453. [Phan Thị Mùi] Cho $1\leq a,b\leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{\left(a+b\right)^2}{a^3+b^3}$$

454. [Lê Quang Nẫm] Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$4\left(xy+yz+zx\right)\leq\sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\right).$$

455. Cho $a,b,c>1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b}-1}+\frac{b}{\sqrt{c}-1}+\frac{c}{\sqrt{a}-1}\geq 12.$$

456. [Nguyễn Đức Tấn] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq a\sqrt{ac}+b\sqrt{ba}+c\sqrt{cb}.$$

457. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^3+y^3+z^3=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}\geq 2.$$

458. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S=ab+2bc+3ca.$$

459. [Thái Nhật Phượng] Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$2xyz+xy+yz+zx\leq 1.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$xyz.$$

460. [Minh Trân] Cho $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x_1x_2+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n.$$

461. [Trần Văn Tỏ] Cho $a,b,c\geq 1$. Chứng minh rằng

$$a\left(b+c\right)+b\left(c+a\right)+c\left(a+b\right)+2\left(\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\right)\geq 9.$$

462. [Tạ Hoàng Thông] Cho x,y,z là ba số thực dương thỏa điều kiện $x^3+y^3+z^3=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=3\left(xy+yz+zx\right)-xyz.$$

463. [Trương Ngọc Đắc] Cho $a_1,a_2,...,a_n$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\sum_{i=1}^{k}a_i\leq\sum_{i=1}^{k}i\left(i+1\right),k=1,2,...,n.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geq\frac{n}{n+1}.$$

464. [Tạ Hoàng Thông] Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{\left(ab+bc+ca\right)^2}.$$

465. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Hãy xác định giá trị lớn nhất của số thực k để ta luôn có bất đẳng thức
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3k\geq(k+1)(a+b+c).$$
Vietnam, 2006

466. Cho $x,y,z\in[1,2]$. Chứng minh rằng
$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right).$$
Vietnam TST, 2006

467. [Đỗ Văn Ta] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc\geq 1$. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}+\frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}}+\frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

468. Cho $\frac{1}{2}\leq x,y,z\leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức
$$P=\frac{x+y}{1+z}+\frac{y+z}{1+x}+\frac{z+x}{1+y}.$$

469. [Phạm Hoàng Hà] Cho x,y,z là ba số thực không âm thỏa điều kiện $x+y+z=4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}.$$

470. [Trần Tuấn Anh] Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3.$$

471. [Tạ Đức Hải] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng
$$4abc\left[\frac{1}{(a+b)^2c}+\frac{1}{(b+c)^2a}+\frac{1}{(c+a)^2b}\right]+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}\geq 9.$$

472. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng
$$\frac{3\sqrt{3}}{4}\leq\frac{bc}{a(1+bc)}+\frac{ca}{b(1+ca)}+\frac{ab}{c(1+ab)}\leq\frac{a+b+c}{4}.$$

473. [Trần Tuấn Anh] Cho $x,y\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$P=\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+x^2}.$$

474. Cho $x_1,x_2,...,x_{2007}\in[-1,1]$ thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{2007}x_i^3=0$. Chứng minh rằng
$$|x_1+x_2+...+x_{2007}|\leq\frac{2007}{3}.$$
Đẳng thức xảy ra khi nào?

475. [Phạm Hoàng Hà] Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện
$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}=2006.$$
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$H=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}.$$

476. [Cao Xuân Nam] Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$\frac{8-x^4}{16+x^4}+\frac{8-y^4}{16+y^4}+\frac{8-z^4}{16+z^4}\ge 0.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$xyz.$$

477. [Nguyễn Khánh Nguyên] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a^2+b^2+c^2=1.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{1+b-a}+\frac{b^2}{1+c-b}+\frac{c^2}{1+a-c}\ge 1.$$

478. [Phan Tiến Thành] Cho $x,y,z\in(0,1)$ thỏa mãn điều kiện $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$. Chứng minh rằng

$$x^2+y^2+z^2\ge\frac{3}{4}.$$

479. [Trần Tuấn Anh] Cho $a,b,c\ge -1, a+b+c=\sqrt[3]{4}-1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=a^3+b^3+c^3.$$

480. [Bùi Tuấn Anh] Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(a+b+c)^3}{abc}.$$

481. [Trần Việt Anh] Cho $n\in\mathbb{N}$. Kí hiệu $(2n+1)!!$ là tích các số nguyên dương lẻ từ 1 đến 2n +1. Chứng minh rằng

$$(2n+1)^{n+1}\le(2n+1)!!\pi^n.$$

482. [Ngô Trung Kiên] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$ab+bc+ca\le 3abc.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a^4b}{2a+b}+\frac{b^4c}{2b+c}+\frac{c^4a}{2c+a}\ge 1.$$

483. [Phạm Văn Thuận] Cho a,b,c,d là các số thực phân biệt thỏa mãn các điều kiện

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=4, ac=bd.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}-\frac{abcd}{(ad+cd)^2}.$$

484. [Phạm Kim Hùng] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc\ge 1$. Chứng minh rằng

$$a+b+c\ge\frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}.$$

485. [Trần Nam Dũng] Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$xyz+2(x^2+y^2+z^2)+8\ge 5(x+y+z).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

486. [Trần Nam Dũng] Cho $k\in(-1,2)$ và a,b,c là ba số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$\left[a^2+b^2+c^2+k(ab+bc+ca)\right]\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right]\ge\frac{9(2-k)}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

487. Cho $x_1, x_2, ..., x_n > -1$ thỏa mãn điều kiện $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = 0$. Chứng minh rằng
$$x_1 + x_2 + ... + x_n \le \frac{n}{3}.$$

488. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{\frac{ab}{c}+1}+\sqrt{\frac{bc}{a}+1}+\sqrt{\frac{ca}{b}+1} \ge 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right).$$

489. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng
$$\left(\frac{bc+a}{1+a}\right)\left(\frac{ca+b}{1+b}\right)\left(\frac{ab+c}{1+c}\right) \ge abc.$$

490. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng
$$\frac{yz}{x(x+y+z)+1}+\frac{zx}{y(x+y+z)+1}+\frac{xy}{z(x+y+z)+1}$$
$$\ge \frac{x^2}{x(x+y+z)+1}+\frac{y^2}{y(x+y+z)+1}+\frac{z^2}{z(x+y+z)+1}.$$

491. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng
$$a^3b+b^3c+c^3a \ge a+b+c.$$

492. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{\sqrt{1+xy}}+\frac{1}{\sqrt{1+yz}}+\frac{1}{\sqrt{1+zx}} \ge \frac{9}{\sqrt{10}}.$$

493. Cho $-1 \le x, y \le 1$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2} \le 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}.$$

494. Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng
$$\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}+\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}} \le \sqrt[n]{n}.$$

495. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \ge \frac{3}{2}.$$

496. Cho a,b,x,y là các số thực dương, $a<b$. Chứng minh rằng
$$\left(x^a+y^a\right)^b \ge \left(x^b+y^b\right)^a.$$

497. Cho $0 < a,b,c \le \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng
$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) \ge \left(\frac{3}{a+b+c}-1\right)^3.$$

498. Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Chứng minh rằng
$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \ge abcd.$$

499. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+(b+c)^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+(c+a)^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+(a+b)^2}} \ge 1.$$

500. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng
$$\left(a^2+2ab\right)^a\left(b^2+2bc\right)^b\left(c^2+2ca\right)^c \ge \left(a^2+b^2+c^2\right)^{a+b+c}.$$

… sẽ tiếp tục cập nhật