$a/b+b/c+c/a?$

Võ Quốc Bá Cẩn

1 Bài toán 1

1.1 [Võ Quốc Bá Cẩn] *Chứng minh rằng với mọi $a,b,c>0$, ta có*

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+1\geq\frac{21(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

Chứng minh. Ta có bất đẳng thức tương đương

$$2(a+b+c)^2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+(a+b+c)^2\geq 21(a^2+b^2+c^2)$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3}{b}+4\sum_{\text{cyc}}ab+\sum_{\text{cyc}}\frac{c^2a}{b}+2\sum_{\text{cyc}}\frac{ca^2}{b}\geq 8\sum_{\text{cyc}}a^2$$

Hay

$$\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3}{b}+\sum_{\text{cyc}}ab-2\sum_{\text{cyc}}a^2\right)+\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{c^2a}{b}-\sum_{\text{cyc}}ab\right)+2\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{ca^2}{b}-\sum_{\text{cyc}}ab\right)\geq 6\left(\sum_{\text{cyc}}a^2-\sum_{\text{cyc}}ab\right)$$

$$\sum_{\text{cyc}}S_c(a-b)^2\geq 0$$

trong đó

$$S_a=\frac{b}{c}+\frac{2a}{c}+\frac{a}{b}-3,\qquad S_b=\frac{c}{a}+\frac{2b}{a}+\frac{b}{c}-3,\qquad S_c=\frac{a}{b}+\frac{2c}{b}+\frac{c}{a}-3$$

Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét bất đẳng thức đã cho trong trường hợp $a\geq b\geq c$ là đủ, khi đó dễ thấy $S_a\geq S_c$ và $S_a\geq 0$, ta có

$$S_b+S_c=\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}+\frac{2c(a+b)}{ab}+\frac{b}{c}-6\geq\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}+2\sqrt{\frac{2(a+b)}{a}}-6\geq 0$$

$$S_c+2S_b=\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+\frac{c(2a+3b)}{ab}+\frac{2b}{c}-9\geq\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+2\sqrt{\frac{2(2a+3b)}{a}}-9\geq 0$$

Do đó

+, Nếu $S_b\geq 0$, ta có $(a-c)^2\geq(a-b)^2$ nên

$$VT\geq(S_b+S_c)(a-b)^2\geq 0$$

+, Nếu $S_b\leq 0$, theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có $(a-c)^2\leq(a-b)^2+(b-c)^2$ nên

$$VT\geq(S_a+2S_b)(b-c)^2+(S_c+2S_b)(a-b)^2\geq(S_c+2S_b)(b-c)^2+(S_c+2S_b)(a-b)^2\geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

2 Hệ quả của bài toán 1

2.1 [Vasile Cirtoaje] *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$, ta có*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c}$$

Chứng minh. Sử dụng bài toán 1, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{21(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} \geq \frac{6\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c}+1$$

Đặt $x = \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c} \geq 1$, bất đẳng thức tương đương

$$7x^2 \geq 6x+1$$

Hay

$$(x-1)(7x+1) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

2.2 [Võ Quốc Bá Cẩn] *Cho $a, b, c > 0$, chứng minh bất đẳng thức*

$$3\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}+\frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 2+3\sqrt{3}$$

Chứng minh. Sử dụng bài toán 1, ta phải chứng minh

$$3\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{21(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}-1\right)}+\frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 2+3\sqrt{3}$$

Hay

$$3\sqrt{\frac{10(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}}+\frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 2+3\sqrt{3}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$, đặt $x = \sqrt{10(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)}$, thế thì $x \in \left[\sqrt{3}, \sqrt{10}\right]$ và bất đẳng thức trở thành

$$3x+\frac{2(10-x^2)}{2x^2+1} \geq 3\sqrt{3}+2$$

Ta có

$$VT-VP = \frac{3\left(x-\sqrt{3}\right)\left(2x^2-2x+1-2\sqrt{3}\right)}{2x^2+1} \geq \frac{3\left(x-\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)}{2x^2+1} \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

2.3 *Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta luôn có*

$$3\sqrt{3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)}+7\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq 16$$

Chứng minh. Sử dụng kết quả bài toán 1, ta cần chứng minh

$$3\sqrt{\frac{3(10(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca))}{(a+b+c)^2}}+7\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq 16$$

Đặt $x=\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\leq 1$, bất đẳng thức trở thành

$$3\sqrt{\frac{3(10-x^2)}{2x^2+1}}+7x\geq 16$$

Ta có

$$\frac{27(10-x^2)}{2x^2+1}-(16-7x)^2=\frac{14(x-1)^2(1+18x-7x^2)}{2x^2+1}\geq 0$$

Do đó, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

2.4 [Nguyễn Anh Cường] *Cho các số không âm a,b,c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{7\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c}+\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{a^3+b^3+c^3}\geq 8$$

Chứng minh. Sử dụng kết quả bài toán 1, ta có

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\geq\frac{21(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)^2}-\frac{1}{2}\geq\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

Suy ra

$$a^2b+b^2c+c^2a\geq\frac{9abc(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{7\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c}+\frac{9abc(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2(a^3+b^3+c^3)}\geq 8$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$, đặt $x=ab+bc+ca$ thì ta có $\frac{1}{3}\geq x\geq 0$. Hơn nữa, theo bất đẳng thức Schur, ta suy $abc\geq\frac{4x-1}{9}$, do đó

$$\frac{9abc}{a^3+b^3+c^3}=\frac{9abc}{3abc+1-3x}\geq\frac{3(4x-1)}{2-5x}$$

Như thế, ta phải chứng minh

$$7\sqrt{3(1-2x)}+\frac{3(4x-1)(1-2x)}{2-5x}\geq 8$$

Ta có

$$\begin{aligned}147(1-2x)-\left(8-\frac{3(4x-1)(1-2x)}{2-5x}\right)^2&=\frac{(3x-1)^2(227-550x-64x^2)}{(2-5x)^2}\\&\geq\frac{(3x-1)^2\left(227-550\cdot\frac{1}{3}-64\cdot\frac{1}{9}\right)}{(2-5x)^2}=\frac{329(3x-1)^2}{9(2-5x)^2}\geq 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

3 Bài toán 2

3.1 *Với mọi $x, y, z > 0$ thỏa $xyz = 1$, ta có*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6 \geq \frac{3}{2}\left(x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \min\{x, y, z\}$. Đặt $t = \sqrt{yz}$ và

$$P(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 6 - \frac{3}{2}\left(x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

Ta có

$$\begin{aligned} P(x, y, z) - P(x, t, t) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2\left(2\left(\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2 - 3 - \frac{3}{bc}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2(8 - 3 - 3) \geq 0 \end{aligned}$$

Lại có

$$P(x, t, t) = P\left(\frac{1}{t^2}, t, t\right) = \frac{(t-1)^2((t^2 - 2t - 1)^2 + t^2 + 1)}{2t^4} \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Nhận xét. Bất đẳng thức trên có thể viết lại ở dạng khác như sau

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b^2} + 6 \geq \frac{3}{2}\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 + b^2}{ab} \qquad \forall a, b, c \geq 0$$

4 Hệ quả bài toán 2

4.1 [Phạm Hữu Đức] *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$, ta luôn có*

$$\frac{a^2b}{c(b+c)} + \frac{b^2c}{a(c+a)} + \frac{c^2a}{b(a+b)} \geq \frac{3}{2}\cdot\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$$

Chứng minh. Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, c = \frac{1}{c}$ thế thì bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2}{y^2(z+x)} \geq \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}{xyz(xy + yz + zx)}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2(x+y+z)}{y^2(z+x)} \geq \frac{3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)(x+y+z)}{2xyz(xy + yz + zx)}$$

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2}{y^2} + \sum_{\text{cyc}} \frac{x^2}{y(z+x)} \geq \frac{3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)(x+y+z)}{2xyz(xy + yz + zx)}$$

Sử dụng kết quả bài toán 2 và bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2}{y^2} \geq \frac{3}{2}\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2 + y^2}{xy} - 6, \qquad \sum_{\text{cyc}} \frac{x^2}{y(z+x)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(xy + yz + zx)}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{3}{2}\sum_{\text{cyc}}\frac{x^2+y^2}{xy}-6+\frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)}\geq\frac{3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)(x+y+z)}{2xyz(xy+yz+zx)}$$

Chuẩn hóa cho $x+y+z=1$ và đặt $u=xy+yz+zx, v=xyz$ thì ta có $\frac{1}{3}\geq q\geq 0, r\geq 0$ và bất đẳng thức trở thành

$$\frac{3(u-3v)}{2v}+\frac{1}{2u}-6\geq\frac{3(u^2-2v)}{2uv}$$

Ta có

$$VT-VP=\frac{7(1-3u)}{2u}\geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

4.2 [Nguyễn Văn Thạch] *Chứng minh rằng với mọi $a,b,c>0$, ta có*

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{8(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 11$$

Chứng minh. Sử dụng kết quả bài toán 2, ta suy ra được ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{3}{2}\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{8(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 17$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}}S_c(a-b)^2\geq 0$$

trong đó

$$S_a=\frac{3}{bc}-\frac{8}{a^2+b^2+c^2},\qquad S_b=\frac{3}{ca}-\frac{8}{a^2+b^2+c^2},\qquad S_c=\frac{3}{ab}-\frac{8}{a^2+b^2+c^2}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c$, khi đó, dễ thấy $S_a\geq S_b\geq S_c$, lại có

$$S_b+S_c=\frac{3(b+c)}{abc}-\frac{16}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{6}{a\sqrt{bc}}-\frac{16}{a^2+2bc}\geq\frac{6}{a\sqrt{bc}}-\frac{16}{2a\sqrt{2bc}}>0$$

Từ đây, ta dễ dàng suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét. Chú ý rằng $\left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)^2+1\geq\frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}$, ta suy ra

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+4\left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)^2\geq 7$$

Kết quả này được tìm ra bởi bạn Nguyễn Anh Cường và đã được đưa lên `http://mathnfriend.org/`

5 Các bài toán khác

5.1 [Võ Quốc Bá Cẩn] *Cho các số không âm a,b,c, chứng minh bất đẳng thức*

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\frac{8(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 17$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$, đặt $a = c + x, b = c + y$ $(x, y \geq 0)$, bằng biến đổi tương đương, ta có thể viết lại bất đẳng thức như sau

$$f(c) = (x^2 - xy + y^2)c^3 - (2x^3 - 9xy^2 + 2y^3)c^2 + (3x^4 - 11x^3y + 20x^2y^2 - 5xy^3 + 3y^4)c + 3xy^4 + 3x^3y^2 \geq 0$$

Ta có

$$f'(c) = 3(x^2 - xy + y^2)c^2 - 2(2x^3 - 9xy^2 + 2y^3)c + 3x^4 - 11x^3y + 20x^2y^2 - 5xy^3 + 3y^4$$

$$\Delta'_{f'} = -(5x^6 - 42x^5y + 138x^4y^2 - 116x^3y^3 + 3x^2y^4 + 12xy^5 + 5y^6) \leq 0$$

Suy ra $f'(c) \geq 0$, do đó $f(c)$ là hàm đồng biến, lại có $f(0) = 3xy^4 + 3x^3y^2 \geq 0$ nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.