

# Tuyển tập Bất Đẳng Thức Solved

Nguyễn Việt Anh

Ngày 16 tháng 7 năm 2005

1. *Posted by StRyKeR*

Cho  $x, y, z$  là các số không âm thỏa mãn  $x + y + z = 1$ . Chứng minh rằng :

$$x^n y + y^n z + z^n x \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

2. *Posted by manlio*

Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực dương nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n + 1)^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

3. *Posted by manlio*

Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_1 + x_2} + \dots + \frac{n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \leq \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

4. *Posted by hxtung*

Tìm hằng số  $k, k'$  tốt nhất sao cho

$$k \leq \frac{v}{v+w} + \frac{w}{w+x} + \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+v} \leq k'$$

với mọi số thực  $v, w, x, y, z$

5. *Posted by pcalin*

Chứng minh với  $x, y, z > 0$  bất đẳng thức sau đúng:

$$\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} \geq 1 + \sqrt{1 + \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)}}$$

6. *Posted by Mitzah*

Chứng minh bất đẳng thức sau cho mọi tam giác  $ABC$

$$\frac{bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C}{a \sin A + b \sin B + c \sin C} \geq 2r$$

7. *Posted by georg*

Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq x^{2n} + (1-x^2)^n \leq 1$$

trong đó  $n > 1$

8. *Posted by Maverick*

Tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $\sin A \sin B \sin C = \frac{1}{3}$ . Chứng minh khi đó ta có :

$$p^3 + Sr + abc > 4R^2p$$

9. *Posted by Lagrangia*

Cho các số thực dương  $a, b, c, x, y, z$  thỏa mãn  $a + c = 2b$  và đặt

$$A = \frac{ax + by + cz}{az + by + cx}$$

$$B = \frac{ay + bz + cx}{ax + bz + cy}$$

$$C = \frac{az + by + cx}{ay + bz + cx}$$

Chứng minh rằng  $\max A, B, C \geq 1$

10. *Posted by vineet*

Chứng minh bất đẳng thức sau cho  $a, b, c > 0$  :

$$\frac{(2a + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2} + \frac{(a + 2b + c)^2}{2b^2 + (c + a)^2} + \frac{(a + b + 2c)^2}{2c^2 + (a + b)^2} \leq 8$$

11. *Posted by treegoner*

Cho  $ABC$  là tam giác nhọn. Chứng minh rằng:

$$\left( \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) (\sqrt{\coth A \coth B} + \sqrt{\coth B \coth C} + \sqrt{\coth C \coth A}) \leq 3$$

12. *Posted by DusT*

Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng

$$\frac{2R}{r} \leq \frac{E_1}{E_2}$$

trong đó

$$E_1 = \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$$
$$E_2 = \sin A + \sin B + \sin C$$

13. *Posted by Reyes*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \leq 1$$

14. *Posted by Maverick*

Cho  $a, b, c, d > 0$ , đặt  $E = \sqrt[4]{abcd}$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a+d^2}{b} + \frac{c+a^2}{d} + \frac{b+c^2}{a} + \frac{d+b^2}{c} \geq 4(1+E)$$

15. *Posted by Alexander Khrabrov*

Cho  $0 \leq b_k \leq 1$  với mọi  $k$  và

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots a_n \geq a_{n+1} = 0$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sum_{k=1}^{\left[\sum_{i=1}^n b_i\right]+1} a_k$$

16. *Posted by Lagrangia*

Cho tam giác  $ABC$  nhọn. Chứng minh rằng

$$\cos A + \cos B + \cos C < \sin A + \sin B + \sin C$$

17. *Posted by galois*

Chứng minh trong mọi tam giác  $ABC$  ta có bất đẳng thức

$$\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{B-C}{2}\right) + \cos\left(\frac{C-A}{2}\right) \geq \sin\left(\frac{3A}{2}\right) + \sin\left(\frac{3B}{2}\right) + \sin\left(\frac{3C}{2}\right)$$

18. *Posted by Valentin Vornicu*

Cho 3 số  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ . Chứng minh rằng

$$2(a+b+c) - abc \leq 10$$

19. *Posted by Michael*

Cho 3 số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{c^2+1} + \frac{c^2}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

20. *Posted by hxtung*

Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực nằm trong  $[0, \frac{1}{2}]$ . Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{x_1} - 1\right)\left(\frac{1}{x_2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{x_n} - 1\right) \geq \left(\frac{n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} - 1\right)^n$$

21. *Posted by hxtung*

Cho  $a, b, c$  là các số thực và  $n$  là số tự nhiên. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \dots + \frac{1}{a+nb} < \frac{n}{\sqrt{a(a+b)}}$$

22. *Posted by hxtung*

Chứng minh rằng với các số thực dương  $x_1 x_2 \dots x_n$  thỏa mãn  $x_1 x_2 \dots x_n = 1$  bất đẳng thức sau xảy ra

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \dots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1$$

23. *Posted by Mitzah*

Chứng minh rằng

$$\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n} + \sqrt{2n-1} - \dots - \sqrt{2} + 1 > \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$$

24. *Posted by hxtung*

Cho  $x, y, z$  là các số thực nằm trong  $[-1, 1]$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)} + \frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 2$$

25. *Posted by hxtung*

Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $x + y + z = 3$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + zx$$

26. *Posted by keira-khtn*

Chứng minh rằng

$$\frac{2x^2}{2x^2 + (y+z)^2} + \frac{2y^2}{2y^2 + (z+x)^2} + \frac{2z^2}{2z^2 + (x+y)^2} \leq 1$$

27. *Posted by georg*

Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng

$$m_a m_b m_c \geq r_a r_b r_c$$

28. *Posted by alekk*

Chứng minh rằng với mọi số thực dương  $x, y$  ta có bất đẳng thức sau

$$x^y + y^x > 1$$

29. *Posted by billzhao*

Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \sin A + \sin B + \sin C$$

30. *Posted by hxtung*

Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $x + y + z + 2 = xyz$ . Chứng minh rằng

$$5(x + y + z) + 18 \geq 8(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx})$$

31. *Posted by Mitzah*

Chứng minh bất đẳng thức sau cho mọi số dương  $a, b, c$

$$\frac{a}{a + 2b + c} + \frac{b}{b + 2c + a} + \frac{c}{c + 2a + b} \leq 1$$

32. *Posted by Lagrangia*

Cho  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 > 0$ . Chứng minh rằng

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1)$$

33. *Posted by Maverick*

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn

$$3(a + b + c) \geq ab + bc + ca + 2$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a^3 + bc}{2} + \frac{b^3 + ca}{3} + \frac{c^3 + ab}{5} \geq \frac{\sqrt{abc(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})}}{3}$$

34. *Posted by hxtung*

Với các số thực không âm  $a, b, c, d$  ta đặt

$$S = a + b + c + d$$

$$T = ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

$$R = abc + abd + acd + bcd$$

$$H = abcd$$

Chứng minh rằng

$$\frac{S}{4} \geq \sqrt{\frac{T}{6}} \geq \sqrt[3]{\frac{R}{4}} \geq \sqrt[4]{H}$$

35. *Posted by Maverick*

Chứng minh trong mọi tam giác ta có bất đẳng thức

$$a(h_b + h_c) + b(h_c + h_a) + c(h_a + h_b) \geq 12S$$

36. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, b, c, d$  là các cạnh của một tứ giác lồi. Chứng minh rằng

$$3\sqrt{S} \leq p + \sqrt[4]{abcd}$$

37. *Posted by Maverick*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3 + b^3}{c} + \frac{b^3 + c^3}{a} + \frac{c^3 + a^3}{b} \geq \frac{2}{3}(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})^2$$

38. *Posted by hxtung*

Cho các số thực  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  và thỏa mãn

$$(x_1)^k + (x_2)^k + \dots + (x_n)^k \geq 0$$

với mọi số nguyên dương  $k$ . Đặt  $d = \max |x_1|, \dots, |x_n|$

Chứng minh rằng  $x_1 = d$  và

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \leq x^n - d^n$$

với mọi số thực  $x \geq d$

39. *Posted by hxtung*

Cho các số thực dương  $a, b, c, d$  có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1 + 176abcd}{27}$$

40. *Posted by keira-khtn*

Với  $x_1, x_2, \dots, x_n$  và  $y_1, y_2, \dots, y_n$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sum \min(x_i x_j, y_i y_j) \leq \sum \min(x_i y_j, x_j y_i)$$

41. *Posted by hxtung*

Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c \geq 6$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b+c}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c+a}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a+b}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

42. *Posted by Maverick*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} \geq abc + \sqrt[3]{(a^3 + abc)(b^3 + abc)(c^3 + abc)}$$

43. *Posted by Myth*

Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{x + \sqrt[3]{y + \sqrt[4]{z}}} \geq \sqrt[32]{xyz}$$

44. *Posted by Maverick*

Cho  $a, b > 0$ . Đặt

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \\ B &= \frac{a + \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2} + b}{4} \\ C &= \frac{a + \sqrt{ab} + b}{3} \end{aligned}$$

Chứng minh rằng

$$A \leq B \leq C$$



45. *Posted by hxtung*

Cho  $x, y, z$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$3(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)(z^2 - z + 1) \geq (xyz)^2 + xyz + 1$$

46. *Posted by hxtung*

Chứng minh bất đẳng thức sau cho mọi số thực  $a, b, c$

$$(a + b - c)^2(b + c - a)^2(c + a - b)^2 \geq (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)$$

47. *Posted by Lagrangia*

Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $\widehat{A} \leq \widehat{B} \leq \widehat{C} \leq \frac{\pi}{2}$  và  $\widehat{B} \geq \frac{\pi}{3}$ . Chứng minh rằng

$$m_b \geq h_a$$

48. *Posted by alekk*

Cho  $a, b, c$  là các số thực nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1$$

49. *Posted by alekk*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{b+c}(\sqrt{a+b} + \sqrt{a+c}) \geq \frac{b+c}{2} + \sqrt{ab} + \sqrt{ac}$$

50. *Posted by Arne*

Chứng minh bất đẳng thức

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} + \operatorname{cosec} \frac{\pi}{4} + \dots + \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2^{n-1}} \leq \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2^n}$$

luôn đúng với mọi số nguyên dương  $n$ . Trong đó  $\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin x}$  với  $x \neq k\pi$

51. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, b, c > 0$  và  $n$  là số tự nhiên lớn hơn 2. Chứng minh rằng

$$\frac{n-1}{2}(a^n + b^n) + c^n \geq nabc \left( \frac{a+b}{2} \right)^{n-3}$$

52. *Posted by Maverick*

Cho các số thực dương  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Chứng minh rằng

$$x_1^{x_1} x_2^{x_2} \cdots x_n^{x_n} \geq \left( \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right)^{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$$

53. *Posted by Maverick*

Cho  $a, b, c > 0$  và thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq a + b + c$$

54. *Posted by hxtung*

Cho dãy số  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq \sqrt{k}$$

với mọi số  $k$  nguyên dương nhỏ bằng  $n$ . Chứng minh rằng

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$$

55. *Posted by Maverick*

Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $ab + bc + ca = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

56. *Posted by Maverick*

Cho các số dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Chứng minh rằng

$$\left( \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \right)^{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \geq \left( \frac{a_1}{b_1} \right)^{b_1} \left( \frac{a_2}{b_2} \right)^{b_2} \cdots \left( \frac{a_n}{b_n} \right)^{b_n}$$

57. *Posted by alekk*

Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + x^2} \geq \frac{x + y + z}{2}$$

58. *Posted by*

Cho các số  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} > 0$  thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n$  là các số thực. Chứng minh bất đẳng thức

$$b_1^2 + \frac{b_2^2}{a_1} + \dots + \frac{b_n^2}{a_{n-1}} \geq 2b_1(b_2 + \dots + b_n)$$

59. *Posted by manlio*

Chứng minh rằng với các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ta có bất đẳng thức

$$\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right) \left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right) \dots \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right) \geq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)$$

60. *Posted by Moubinool*

Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a + b + c)^3}{3(x + y + z)}$$

với mọi số thực dương  $a, b, c, x, y, z$

61. *Posted by cesar lupu*

Cho hàm số  $f : R \rightarrow R$  thỏa mãn

$$f(x) + f(y) \leq 2 - |x - y|$$

với mọi số thực  $x, y$ . Chứng minh rằng  $f(x) \leq 1$  với mọi số thực  $x$ .

62. *Posted by hxtung*

Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực nằm trong khoảng  $(0, \frac{\pi}{2})$  sao cho

$$\tan x_1 + \tan x_2 + \dots + \tan x_n \leq n$$

Chứng minh rằng

$$\sin x_1 \sin x_2 \dots \sin x_n \leq \frac{1}{\sqrt{2^n}}$$

63. *Posted by Maverick*

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1 + ab^2}{c^3} + \frac{1 + bc^2}{a^3} + \frac{1 + ca^2}{b^3} \geq \frac{18}{a^3 + b^3 + c^3}$$

64. *Posted by Maverick*

Cho  $a \geq b \geq c \geq 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{b^2 - c^2}{a} + \frac{c^2 - a^2}{b} \geq 3a - 4b + c$$

65. *Posted by Maverick*

Cho  $x, y, z \geq 1$ . Chứng minh rằng

$$x^{x^2+2yz} y^{y^2+2zx} z^{z^2+2xy} \geq (xyz)^{xy+yz+zx}$$

66. *Posted by Maverick*

Cho các số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nằm trong khoảng  $(0, \frac{1}{2})$  và thỏa

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$$

Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{a_2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{a_n} - 1\right) \geq (n^2 - 1)^n$$

67. *Posted by hxtung*

Chứng minh rằng với mọi số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ta có bất đẳng thức

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > \frac{n}{4}$$

68. *Posted by Maverick*

Cho các số thực dương  $a, b, c, d$  thỏa mãn  $ab + bc + cd + da = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$$

69. *Posted by hxtung*

Cho tam giác  $ABC$ . Đặt

$$x = \frac{r}{R}, y = \frac{a+b+c}{2R}$$

Chứng minh rằng

$$y \geq \sqrt{x}(\sqrt{6} + \sqrt{2-x})$$

70. *Posted by Maverick*

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa  $xyz = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$$

71. *Posted by Arne*

Cho  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  là các số thực có tổng bình phương bằng 1. Chứng minh rằng

$$\min(a_i - a_j) \leq \frac{1}{10}$$

72. *Posted by Lagrangia*

Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \geq 2 \left( \frac{1}{\cos \frac{A-B}{4}} + \frac{1}{\cos \frac{B-C}{4}} + \frac{1}{\cos \frac{C-A}{4}} \right)$$

73. *Posted by Maverick*

Cho các số thực dương  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Chứng minh rằng

$$\sum x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \frac{(\sum x_i)^4}{8}$$

74. *Posted by hxtung*

Chứng minh rằng

$$a_1^2 + \left( \frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \leq 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

75. *Posted by Maverick*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$$

76. *Posted by orl*

Cho  $k, n$  là các số nguyên dương thỏa  $1 < k \leq n$  và  $x_1, x_2, \dots, x_k$  là  $k$  số nguyên dương có tổng bằng tích

(a) Chứng minh rằng

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} \geq kn$$

(b) Điều kiện cần và đủ nào của các số  $k, n$  và  $x_1, x_2, \dots, x_n$  để xảy ra đẳng thức

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = kn$$

77. *Posted by hxtung*

Cho các số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n$  là các số thực dương nằm trong khoảng  $[1001, 2002]$ . Giả sử rằng

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^3}{b_1} + \frac{a_2^3}{b_2} + \dots + \frac{a_n^3}{b_n} \leq \frac{17}{10}(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

78. *Posted by Maverick*

Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+x)(y+z)}} + \frac{z}{x + \sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq 1$$

79. *Posted by Charlie*

Cho các số thực dương  $a, b, c, d$  thỏa mãn  $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 6$ . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2abcd \geq 6$$

80. *Posted by Charlie*

Cho các số thực dương  $a, b, c, d$ . Chứng minh rằng

$$9(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab) \leq 8(a^3 + b^3 + c^3)^2$$

81. *Posted by hxtung*

Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Chứng minh rằng

(a)

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \geq \sin \frac{4}{3} \left( 1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)$$

(b)

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \geq \cos \frac{4\sqrt{3}}{3} \left( 1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)$$

82. *Posted by orl*

Dãy số  $a_n$  được định nghĩa như sau

$$\star a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1$$

$$\star a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n)$$

(a) Chứng minh rằng tất cả các phần tử của dãy đều là số chính phương

(b) Tìm công thức tường minh cho dãy

83. *Posted by Maverick*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{2(a+b)}{3a+6b+9c} + \frac{6(b+c)}{5a+2b+3c} + \frac{3(c+a)}{2a+8b+6c}$$

84. *Posted by Maverick*

Cho  $a, b, c \leq 1$  và thỏa mãn

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}$$

85. *Posted by Bottema*

Cho các số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^3 + b^3 + c^3 = 1$ . Chứng minh rằng

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \leq 3 + \sqrt[3]{9}$$

86. *Posted by manlio*

Cho các số dương  $a, b, c, d$  thỏa mãn  $3\sqrt{3}(d+1) \geq a+b+c$ . Chứng minh rằng

$$\frac{(b+cd)^2}{a} + \frac{(c+ad)^2}{b} + \frac{(a+bd)^2}{c} \geq abc$$

87. *Posted by bugzpodder*

Cho các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x + y + z = 1$ . Chứng minh rằng

$$yx^2 + zy^2 + xz^2 \leq \frac{4}{27}$$

88. *Posted by hxtung*

Chứng minh rằng

$$2 \leq (1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2 + (1 - z^2)^2 \leq (1 + x)(1 + y)(1 + z)$$

với các số không âm  $x, y, z$  có tổng bằng 1

89. *Posted by Maverick*

Cho các số dương  $x, y, z$  thỏa  $xy + yz + zx = 1$ . Chứng minh rằng

$$x(1 - y^2)(1 - z^2) + y(1 - z^2)(1 - x^2) + z(1 - x^2)(1 - y^2) \leq \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

90. *Posted by hxtung*

Chứng minh bất đẳng thức sau cho các số thực dương  $a, b, c$

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \leq \frac{3}{1+abc}$$

91. *Posted by Gil*

Chứng minh rằng nếu  $x, y, z > 0$  thì

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 4 \left( \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right)$$

92. *Posted by hxtung*

Chứng minh rằng với các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x + y + z + xyz = 4$ . Chứng minh rằng

$$x + y + z \geq xy + yz + zx$$

93. *Posted by Maverick*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{2ab}{b^2 + ca} + \frac{2bc}{c^2 + ab} + \frac{2ca}{a^2 + bc}$$

94. *Posted by Vialli*

Chứng minh bất đẳng thức sau cho các số thực dương  $a, b, c$

$$\frac{a^2 + bc}{b + c} + \frac{b^2 + ca}{c + a} + \frac{c^2 + ab}{a + b} \geq a + b + c$$



95. *Posted by Maverick*

Xác định giá trị của  $k$  để bất đẳng thức sau đúng với mọi số dương  $x, y, z$

$$2(x^3 + y^3 + z^3) + 3(3k + 1)xyz \geq (1 + k)(x + y + z)(xy + yz + zx)$$

96. *Posted by Mitzah*

Chứng minh rằng với  $a, b, c \leq 0$  ta có

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq \frac{2}{3}(ab + bc + ca)^2$$

97. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

98. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c \geq -1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2} + \frac{1+b^2}{1+c+a^2} + \frac{1+c^2}{1+a+b^2} \geq 2$$

99. *Posted by manlio*

Nếu  $a, b, c$  là các số thực dương hãy chứng minh

$$\frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 2ca}{c^2 + a^2} + \frac{c^2 + 2ab}{a^2 + b^2} \geq 3$$

100. *Posted by dreammath*

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$3(a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}) \leq \left(8 + \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right) \left(a \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3}\right)$$

101. *Posted by Maverick*

Cho các số thực  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  và  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ . Giả sử rằng  $z_1, z_2, \dots, z_n$  là một hoán vị của  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Chứng minh rằng

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2$$

102. *Posted by manlio*

Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 8abc$$

103. *Posted by manlio*

Giả sử rằng  $a, b, c$  là các số thực dương có tổng bằng 1 và  $n$  là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{a^n}\right)\left(\frac{1}{b^n}\right)\left(\frac{1}{c^n}\right) \geq (3^n - 1)^3$$

104. *Posted by bugzpodder*

Giả sử rằng  $a, b, c$  là các số thực dương và  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)} + \frac{1}{(1+b)(1+c)} + \frac{1}{(1+c)(1+a)} \leq \frac{3}{2}$$

105. *Posted by Myth*

Cho  $a, b, c, A, B, C > 0$  và  $a + A = b + B = c + C = k$ . Chứng minh rằng

$$aB + bC + cA \leq k^2$$

106. *Posted by manlio*

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \leq \frac{1}{\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+d}}$$

trong đó  $a, b, c, d > 0$

107. *Posted by manlio*

Cho  $a_i (i = 1, 2, \dots)$  là các số thực dương. Gọi  $p, q, r, s$  là các số thực dương sao cho  $pr = qs$ . Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_r}\right)^p (a_1 + a_2 + \dots + a_s)^q \geq n^{p+q}$$

108. *Posted by manlio*

Cho các số thực  $a, b, c$  nằm trong khoảng  $(0, \frac{1}{2})$  và thỏa  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{a(1-2a)} + \sqrt{b(1-2b)} > \sqrt{c(1-2c)}$$

109. *Posted by manlio*

Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa  $z = x + y$ . Chứng minh rằng

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 \geq 54x^2y^2z^2$$

110. *Posted by manlio*

Cho  $x, y, z$  là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$xy + yz + zx \leq \frac{1}{4} + 3xyz$$

111. *Posted by Maverick*

Cho các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  có tổng nhỏ bằng 1. Chứng minh rằng

$$n^{n+1}a_1a_2 \cdots a_n(1 - a_1 - a_2 - \dots - a_n) \leq (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n)(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

112. *Posted by manlio*

Cho  $0 < A_1 < 1$  và  $a_{k+1} = a_k^2$  với  $k = 1, 2, \dots$ . Chứng minh rằng

$$(a_1 - a_2)a_3 + (a_2 - a_3)a_4 + \dots + (a_n - a_{n+1})a_{n+2} < \frac{1}{3}$$

113. *Posted by manlio*

Cho  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{2n-1} \geq 0$ . Chứng minh rằng

$$a_1^2 - a_2^2 + \dots + a_{2n-1}^2 \geq (a_1 - a_2 + \dots + a_{2n-1})^2$$

114. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là các số thực lớn hơn 1 và thỏa  $abc = 2\sqrt{2}$ . Chứng minh rằng

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 8(a - 1)(b - 1)(c - 1)$$

115. *Posted by manlio*

Cho  $a_i, b_i (i = 1, 2, \dots)$  là các số thực thỏa mãn

$$a_1 \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \dots \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$b_1 \geq \frac{b_1 + b_2}{2} \geq \dots \geq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$$

Chứng minh rằng

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

116. *Posted by manlio*

Chứng minh rằng với mọi số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned} & (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n) + \left(1 + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \\ & \geq (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) + \left(1 - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \end{aligned}$$

117. *Posted by darij grinberg*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a} + \frac{c+a}{c+a} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

118. *Posted by pcalin*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3$$

119. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq 1$$

120. *Posted by manlio*

Với  $a_i, b_i (i = 1, 2, \dots, n)$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2 b_2}{a_2 + b_2} + \cdots + \frac{a_n b_n}{a_n + b_n} \leq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

121. *Posted by Maverick*

Cho các số thực  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \geq (ab + bc + ca)^3$$

122. *Posted by Arne*

Cho  $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ . Chứng minh rằng

$$a_1 a_2^4 + a_2 a_3^4 + \cdots + a_n a_1^4 \geq a_2 a_1^4 + a_3 a_2^4 + \cdots + a_1 a_n^4$$

123. *Posted by manlio*

Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \geq 1$$

124. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là các số thực và  $x = a^2 + b^2 + c^2$ . Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq \frac{x^3}{2} + 3abc$$

125. *Posted by manlio*

Với  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right) \geq \frac{9}{1+abc}$$

126. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \leq \sqrt{2}$$

127. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a) \leq \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^6$$

128. *Posted by manlio*

Cho  $a, b$  là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4 + b^4}{(a+b)^4} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \geq \frac{5}{8}$$

129. *Posted by manlio*

Cho các số dương  $a, b, c$ . Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ca}{b(b+c)} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}$$

130. *Posted by manlio*

Cho  $a_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  là các số thực trong đoạn  $[0, \frac{1}{6}]$ . Chứng minh rằng

$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_6)(x_6 - x_1)$$

131. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức

$$5(a^2 + b^2 + c^2) \leq 6(a^3 + b^3 + c^3) + 1$$

132. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$1 < \frac{a}{b+c} + \frac{bc}{a^2} \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

133. *Posted by liyi*

Dãy số  $a_n$  thỏa mãn

$$\star a_1 = 1$$

$$\star a_n a_{n+1} = n$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} > 2\sqrt{n} - 1$$

134. *Posted by liyi*

Cho  $x, y, z$  là các số thực thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ . Chứng minh rằng

$$|xyz - (x + y + z)| \leq 2$$

135. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geq 1$$

136. *Posted by manlio*

Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  là tập hợp các số dương và  $b_1, \dots, b_{2n}$  là một hoán vị sắp thứ tự

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{2n}$$

Chứng minh rằng

$$b_1 b_2 \dots b_n + b_{n+1} b_{n+2} \dots b_{2n} \geq a_1 a_2 \dots a_n + a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{2n}$$

137. *Posted by Gil*

Cho  $a, b, c > 0$ . Đặt

$$x = a + \frac{1}{b} \quad y = b + \frac{1}{c} \quad z = c + \frac{1}{a}$$

Chứng minh rằng

$$xy + yz + zx \geq 2(x + y + z)$$

138. *Posted by manlio*

Cho  $n > 1$  là số nguyên dương,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực dương và  $b_1, b_2, \dots, b_n$  là các số thực dương nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}} \left( \frac{a_1}{1-b_1} + \frac{a_2}{1-b_2} + \dots + \frac{a_n}{1-b_n} \right) \leq \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

139. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{(1-b)(1-bc)}{b(1+a)} + \frac{(1-c)(1-ca)}{c(1+b)} + \frac{(1-a)(1-ab)}{a(1+c)} \geq 0$$

140. *Posted by Don 'z[ ]rr[ ]z'*

Với  $m, n$  là các số nguyên dương đặt

$$a = \frac{m^{m+1} + n^{n+1}}{m^m + n^n}$$

Chứng minh rằng

$$a^m + a^n \geq m^m + n^n$$

141. *Posted by manlio*

Với  $a, b, c$  là độ dài cạnh của một tam giác. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} < \frac{1}{16}$$

142. *Posted by manlio*

Cho các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ . Chứng minh rằng

(a)

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x^5 + y^5 + z^5 + 2(x+y+z)x^2y^2z^2$$

(b)

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq x + y + z + \frac{x^4 + y^4 + z^4}{xyz}$$

143. *Posted by Gil*

Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $1 \leq x^2 - xy + y^2 \leq 2$ . Chứng minh rằng

(a)

$$\frac{2}{9} \leq x^4 + y^4 \leq 8$$

(b)

$$x^{2n} + y^{2n} \geq \frac{2}{3^n}$$

với  $n \geq 3$

144. *Posted by manlio*

Chứng minh rằng nếu  $(ca' - ac')^2 < 4(ab' - ba')(c'b - b'c)$  thì ta có

$$b^2 - ac > 0$$

145. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$(a + b - c)^a (b + c - a)^b (a + c - b)^c \leq a^a b^b c^c$$

146. *Posted by vasc*

Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ . Chứng minh rằng

$$x^4 y^4 + y^4 z^4 + z^4 x^4 \leq 3$$

147. *Posted by RNecula*

Cho  $a, b, c$  nằm trong đoạn  $[0, 1]$ . Tìm hằng số  $k$  nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq k \left(1 - \frac{a + b + c}{3}\right)$$

148. *Posted by manlio*

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_{2004}$  thỏa mãn

$$\frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_2} + \dots + \frac{1}{1 + a_{2004}} > 1$$

Chứng minh rằng

$$a_1 a_2 \cdots a_{2004} < 1$$



149. *Posted by manlio*

Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực dương có tổng nhỏ bằng  $\frac{1}{2}$ . Chứng minh rằng

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n) \geq \frac{1}{2}$$

150. *Posted by manlio*

Cho các số thực  $a_1, a_2, \dots, a_{1980}$  nằm trong khoảng  $[1 - \frac{1}{1980}, 1 + \frac{1}{1980}]$ . Chứng minh rằng

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{1980}) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{1980}} \right) \leq \frac{1980^4}{1980^2 - 1}$$

151. *Posted by manlio*

Cho  $0 \leq a \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq b$ . Chứng minh rằng

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \leq \frac{n^2(a+b)^2}{4ab}$$

152. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, x, y, z$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{ay + bz} + \frac{y}{az + bx} + \frac{z}{ax + by} \geq \frac{3}{a + b}$$

153. *Posted by manlio*

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực và đặt

$$b_k = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$C = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n)$$

$$D = (a_1 - b_n) + (a_2 - b_{n-1}) + \cdots + (a_n - b_1)$$

Chứng minh rằng  $C \leq D \leq 2C$

154. *Posted by manlio*

Các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $x^3 + y^3 = x - y$ . Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 < 1$$

155. *Posted by malio*

Cho các số  $0 < x, y, z < 1$ . Chứng minh rằng

$$2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3$$

156. *Posted by Mitzah*

Tìm số thực dương  $n \geq 2$  sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương  $a, b, c$

$$\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}} \geq (abc)^{1/n}$$

157. *Posted by manlio*

Cho  $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq A$

và  $b \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \leq B$  với  $a, b > 0$ . Chứng minh rằng

$$1 \leq \frac{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)}{(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2} \leq \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}} \right)^2$$

158. *Posted by hxtung*

Cho các số thực  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \dots + \frac{1}{x_n + 1} = 1$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n} \geq (n-1) \left( \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right)$$

159. *Posted by manlio*

Cho các số thực dương  $a, b$ . Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + 3 \geq a + b + 3 \left( \frac{3ab + 1}{4} \right)^{\frac{4}{3}}$$

160. *Posted by Gil*

Cho các số dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x + y + z = 1$  Chứng minh rằng

$$\frac{x}{xy + 1} + \frac{y}{yz + 1} + \frac{z}{zx + 1} \geq \frac{36xyz}{13xyz + 1}$$

161. *Posted by Fedor Bakharev*

Tìm hằng số  $k$  nhỏ nhất sao cho với mọi số thực dương  $x, y, z$  ta có

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}} + \frac{y}{\sqrt{y+z}} + \frac{z}{\sqrt{z+x}} \leq k \cdot \sqrt{x+y+z}$$

162. *Posted by manlio*

Cho các số  $0 < a, b, c < \frac{1}{2}$  và  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$3\sqrt{3}abc \geq \sqrt{1-2a}\sqrt{1-2b}\sqrt{1-2c} \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \left( 3 - 8(a^2 + b^2 + c^2) \right)$$

163. *Posted by harazi*

Cho  $0 < a, b, c, d \leq \frac{1}{2}$ . Chứng minh rằng

$$abcd((1-a)^4 + (1-b)^4 + (1-c)^4 + (1-d)^4) \leq (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)$$

164. *Posted by Dapet*

Cho các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn  $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a_1(a_2 + 1)} + \frac{1}{a_2(a_3 + 1)} + \cdots + \frac{1}{a_n(a_1 + 1)} \geq \frac{n}{2}$$

165. *Posted by Gil*

Cho  $0 \leq a, b, c, d \leq 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{a}{bcd + 1} + \frac{b}{cda + 1} + \frac{c}{dab + 1} + \frac{d}{abc + 1}$$

166. *Posted by Gil*

Chứng minh rằng với mọi số thực dương  $x, y, z$  ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{x^2 + xy + y^2} + \frac{1}{y^2 + yz + z^2} + \frac{1}{z^2 + zx + x^2} \geq \frac{9}{(x + y + z)^2}$$

167. *Posted by Gil*

Cho  $a, b, c$  là số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a + \frac{1}{b} - 1\right)\left(b + \frac{1}{c} - 1\right) + \left(b + \frac{1}{c} - 1\right)\left(c + \frac{1}{a} - 1\right) + \left(c + \frac{1}{a} - 1\right)\left(a + \frac{1}{b} - 1\right) \geq 3$$

168. *Posted by harazi*

Cho  $a, b, c$  là các số thực lớn hơn  $-\frac{3}{4}$  và có tổng lớn hơn 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{9}{10}$$

169. *Posted by harazi*

Cho  $a, b, c, d, e, f > 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d + e + f = 1$  và  $ace + bdf \geq \frac{1}{108}$ . Chứng minh bất đẳng thức

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab \leq \frac{1}{36}$$

170. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là số thực dương thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq ab + b + c + ca$$

171. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là số đo các cạnh tam giác. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 + (ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

172. *Posted by manlio*

Cho  $0 < a < b < c < 1$ . Chứng minh rằng

$$3(a + bc) \geq (a + b + c + 3abc) \left( \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \right)$$

173. *Posted by Namdung*

Hàm số  $f$  tăng nghiêm ngặt trong khoảng  $[0, 1]$  thỏa mãn

$$\star f(0) = 0, f(1) = 1$$

$$\star \frac{f(x+y) - f(x)}{f(x) - f(x-y)} \leq 2 \text{ với mọi } x, y \text{ thỏa mãn } 0 \leq x - y \leq x + y \leq 1$$

Chứng minh rằng  $f(\frac{1}{3}) \leq \frac{76}{135}$

174. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} \geq \sqrt{6(a + b + c)}$$

175. *Posted by Gil*

Chứng minh bất đẳng thức sau cho mọi số thực dương  $a, b, c, d$

$$\left( \frac{a}{a+b} \right)^2 + \left( \frac{b}{b+c} \right)^2 + \left( \frac{c}{c+d} \right)^2 + \left( \frac{d}{d+a} \right)^2 \geq 1$$

176. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là số thực dương. Chứng minh rằng

$$3^{a+b+c} \geq \left(1 + \frac{a+b}{c}\right)^c \left(1 + \frac{a+c}{b}\right)^b \left(1 + \frac{b+c}{a}\right)^a$$

177. *Posted by manlio*

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$  ta có

$$(n+1)^{2n} \geq 2\left(n^{\frac{4}{3}} + n^{\frac{5}{3}}\right)^n$$

178. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là những số thực dương thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a)(a+1)(b+1)(c+1) \geq abc(3-a)(3-b)(3-c)$$

179. *Posted by Arne*

Cho  $a, b > 0$  thỏa mãn  $a^{2006} + b^{2005} = a^{2004} + b^{2003}$ . Chứng minh rằng  $a^2 + b^2 \geq 2$

180. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c, d, e$  là các số thực cùng dấu. Chứng minh bất đẳng thức

$$(a-b)(a-c)(a-d)(a-e) + (b-a)(b-c)(b-d)(b-e) + (c-a)(c-b)(c-d)(c-e) \\ + (d-a)(d-b)(d-c)(d-e) + (e-a)(e-b)(e-c)(e-d) \geq$$

181. *Posted by harazi*

Chứng minh với  $a, b, c, x, y, z$  là những số thực dương ta có

$$\frac{a(y+z)}{b+c} + \frac{b(x+y)}{c+a} + \frac{c(x+y)}{a+b} \geq 3 \frac{xy+yz+zx}{x+y+z}$$

182. *Posted by Tung Lam*

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a - b - c \geq abc$ . Chứng minh rằng

$$a^2 - b^2 - c^2 \geq 2\sqrt{2abc}$$

183. *Posted by Namdung*

Cho  $x, y, z$  là các số thực ta có bất đẳng thức

$$2(x^2 + y^2 + z^2)^3 \geq ((x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz)$$

184. *Posted by Arne*

Cho  $a, b, c, d$  là những số thực dương thỏa mãn  $ad - bc = 1$ . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geq \sqrt{3}$$

185. *Posted by harazi*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (a + 1)(b + 1)(c + 1)(abc + 1).$$

186. *Posted by Namdung*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{(b + c - a)^2}{(b + c)^2 + a^2} + \frac{(c + a - b)^2}{(c + a)^2 + b^2} + \frac{(a + b - c)^2}{(a + b)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5}$$

187. *Posted by harazi*

Chứng minh rằng nếu  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn  $abc + bcd + cda + dab = a + b + c + d$  thì

$$\sqrt{\frac{a^2 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{b^2 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + 1}{2}} \leq a + b + c$$

188. *Posted by manlio*

Chứng minh rằng trong tam giác  $ABC$  ta có bất đẳng thức

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 12S^2 + \frac{p^4}{108}$$

189. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{b^2 - a^2}{c + a} + \frac{a^2 - c^2}{b + c} + \frac{c^2 - b^2}{a + b} \geq 0$$

190. *Posted by StRyKeR*

Nếu  $a, b, c$  là các số thực dương có tổng bằng 1 hãy chứng minh

$$(ab)^{\frac{5}{4}} + (bc)^{\frac{5}{4}} + (ca)^{\frac{5}{4}} \leq \frac{1}{4}$$

191. *Posted by manlio*

Cho  $a > b > c$  và  $ab + bc + ca = abc$ . Chứng minh rằng

$$\frac{4}{c^2} + \frac{1}{(a-b)b} + \frac{1}{(b-c)c} \leq \frac{4}{3}$$

192. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  và  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $x + y + z = 1$ . Chứng minh rằng

$$ax + by + cz + 2\sqrt{(xy + yz + zx)(ab + bc + ca)} \leq a + b + c$$

193. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \leq \frac{27}{8}$$

194. *Posted by Lagrangia*

Nếu  $0 < y \leq x < 1$  hãy chứng minh

$$\frac{x}{y} \leq \frac{1+x-\sqrt{1-x^2}}{1+y-\sqrt{1-y^2}}$$

195. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là các số thực thỏa mãn

- (a)  $a + b + c > 0$
- (b)  $ab + bc + ca > 0$
- (c)  $abc > 0$

Chứng minh rằng  $a > 0$

196. *Posted by Maverick*

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $x + y + z = 3$ . Chứng minh rằng

$$2(xy + yz + zx) \leq \frac{x^3 + 1}{z^3} + \frac{y^3 + 1}{y^3} + \frac{z^3 + 1}{x^3}$$

197. *Posted by harazi*

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn

$$a^{10}b^{15} + b^{10}c^{15} + c^{10}a^{15} = a^6b^6c^6$$

Chứng minh rằng

$$a^{35} + b^{35} + c^{35} < \frac{108}{3125}$$

198. *Posted by Lagrangia*

Chứng minh rằng nếu  $x, y, z > 0$  bất đẳng thức sau xảy ra

$$\sqrt{\frac{x+y}{z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} \geq 2\left(\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}}\right)$$

199. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, b$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$2a^3b^3 + a^3 + b^3 \geq a^2b^2(a+b) + ab(a^2 + b^2)$$

200. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2(2c - b) + b^2(2a - c) + c^2(2b - a)$$

201. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a > b > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1 + a + \dots + a^{n-1}}{1 + a + \dots + a^n} < \frac{1 + b + \dots + b^{n-1}}{1 + b + \dots + b^n}$$

202. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a \geq b \geq c \geq 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{(x+z)(y+z)} + \sqrt{(x-z)(y-z)} \leq \sqrt{xy}$$

203. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, b > 0$  và  $x, y$  là các số thực. Chứng minh rằng

$$ax + by \leq \sqrt{(ax^2 + by^2)(a + b)}$$



204. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, b, c, d$  là các số thực. Chứng minh rằng

$$(a + b + c - d)(b + c + d - a)(c + d + a - b)(d + a + b - c) \leq 8(a^2d^2 + b^2c^2)$$

205. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, b, c$  là các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + 3abc$$

206. *Posted by nickolas*

Trong tam giác  $ABC$  ta có  $2b^2 = a^2 + c^2$ . Chứng minh rằng

$$(\coth B)^2 \geq \coth A \coth C$$

207. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  với  $n \geq 3$ . Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a_1 - a_3}{a_2 + a_3} + \frac{a_2 - a_4}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n - a_2}{a_1 + a_2} \geq 0$$

208. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, y, z > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{x+y}{x+z}} + \sqrt{\frac{x+z}{x+y}} \leq \frac{y+z}{\sqrt{yz}}$$

209. *Posted by Lagrangia*

Nếu  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  với  $n \geq 2$  hãy chứng minh

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n+1} \geq \min\left(a_1, \frac{a_n}{2}\right)$$

210. *Posted by Lagrangia*

Chứng minh rằng với  $x \in [0, 1]$  ta có

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

211. *Posted by manlio*

Cho  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  và  $y_1, y_2, \dots, y_n$  là các số thực dương thỏa

- ★  $y_1 \geq x_1$
- ★  $y_1 y_2 \geq x_1 x_2$
- ★ .....
- ★  $y_1 y_2 \cdots y_n \leq x_1 x_2 \cdots x_n$

Chứng minh rằng

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

212. *Posted by nickolas*

Chứng minh trong mọi tam giác  $ABC$  ta có

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{4}{9r(4R+r)}$$

213. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, b, c, d$  là các số nguyên tố phân biệt. Hãy chứng minh

$$abc + bcd + cda + dab + 173 \leq 2abcd$$

214. *Posted by Lagrangia*

Chứng minh rằng với  $a, y, z > 0$  ta có

$$(x+y)^3 + (y+z)^3 + (z+x)^3 \geq 21xyz + x^3 + y^3 + z^3$$

215. *Posted by Lagrangia*

Cho  $m, n \in \mathbb{N} \neq 0$  và  $\sqrt{23} > \frac{m}{n}$  hãy chứng minh

$$\sqrt{23} - \frac{m}{n} > \frac{\sqrt{6}-1}{mn}$$

216. *Posted by Namdung*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$4(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) < 2(a^3+b^3+c^3) + (a+b+c)^3 + 2(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}$$

217. *Posted by harazi*

Tìm giá trị lớn nhất của

$$a_1(a_1 + 4a_2)(a_1 + a_2 + 9a_3) \cdots (a_1 + a_2 + \cdots + n^2 a_n)$$

trong đó  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực dương có tổng bằng 1

218. *Posted by Lagrangia*

Cho  $x, y, z \geq -\frac{1}{4}$  và  $x + y + z = 1$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leq 5$$

219. *Posted by Lagrangia*

Chứng minh rằng với  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  ta có

$$\frac{3 \cos x}{1 + 2 \cos x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{3}{4 - \cos x}$$

220. *Posted by Lagrangia*

Nếu  $a \geq b \geq |x|$  chứng minh rằng

$$\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} \leq 2\sqrt{a}$$

221. *Posted by Lagrangia*

Cho  $n \in \mathbb{N}$  với  $n \geq 2$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{n + \sqrt[n]{n}} + \sqrt[n]{n - \sqrt[n]{n}} \leq 2\sqrt[n]{n}$$

222. *Posted by manlio*

Cho  $n$  là số tự nhiên lớn hơn 3. Chứng minh với mọi số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ta có

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_2 + a_3}{2} \dots \frac{a_n + a_1}{2} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{a_2 + a_3 + a_4}{2\sqrt{2}} \dots \frac{a_n + a_1 + a_2}{2\sqrt{2}}$$

223. *Posted by Lagrangia*

Cho  $x, y \in \mathbb{R}$ . Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$E(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$$

224. *Posted by nickolas*

Chứng minh rằng trong mọi tam giác  $ABC$  ta có

$$m_a + m_b + m_c + \min(a, b, c) \leq l_a + l_b + l_c + \max(a, b, c)$$

225. *Posted by manlio*

Cho  $0 < a, b, c < 1$ . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1$$

226. *Posted by harazi*

Chứng minh rằng với  $a, b, c, d > 0$  ta có

$$\left( (a+b)(b+c)(c+d)(d+a) \right)^3 \geq 16a^2b^2c^2d^2(a+b+c+d)^4$$

227. *Posted by manlio*

Chứng minh rằng

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\left( (h_a)^2 + (h_b)^2 + (h_c)^2 \right)$$

228. *Posted by Valiowk*

Cho  $a, y, z > 0$  thỏa  $xyz = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}} + \frac{1}{\sqrt{1+8y}} + \frac{1}{\sqrt{1+8z}} \geq 1$$

229. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  thỏa mãn

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} = 2$$

Chứng minh rằng

$$abc(a+b+c-abc) \leq \frac{5}{8}$$

230. *Posted by manlio*

Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh với mọi số thực dương  $x, y, z$  ta có

$$\left( \frac{ax+by+cz}{4S} \right)^2 \geq \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} + \frac{xy}{ab}$$

231. *Posted by nickolas*

Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng

$$R - 2r \geq \frac{m_a - h_a}{2}$$

232. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c, x, y, z$  là các số thực thỏa mãn  $a+x = b+y = c+z$ . Chứng minh rằng

$$(abc + xyz) \left( \frac{1}{ay} + \frac{1}{bz} + \frac{1}{cx} \right) \geq 3$$

233. *Posted by Namdung*

Cho  $x, y, z$  là các số thực thỏa mãn

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad x + y + z = 10$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $A = x^2 + y^2 + z^2$

234. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  thỏa  $b + c = a > 0$ . Nếu  $x, y$  là các số thực và thỏa

$$\sqrt{a - bx - cy} + \sqrt{a + by + cx} = a$$

Chứng minh rằng  $|x + y| \leq a$

235. *Posted by manlio*

Cho ngũ giác  $ABCD$  nằm trong đường tròn đơn vị với đường kính  $AE$ . Đặt  $AB = a, BC = b, CD = c, DE = d$ . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd < 4$$

236. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^3 + b^3 + c^3)$$

237. *Posted by darij grinberg*

Cho  $x, y, z$  là ba số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$\left( \sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(z+x)} + \sqrt{z(x+y)} \right) \cdot \sqrt{x+y+z} > 2\sqrt{(y+z)(z+x)(x+y)}$$

238. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh

$$\sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4} + \sqrt{b^4 + b^2c^2 + c^4} + \sqrt{c^4 + c^2a^2 + a^4} \geq a\sqrt{2a^2 + bc} + b\sqrt{2b^2 + ca} + c\sqrt{2c^2 + ab}$$

239. *Posted by manlio*

Cho  $n \in \mathbb{N}$  và các số thực  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thỏa mãn

$$|x_{k+1} - x_k| \leq 1$$

với  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ . Chứng minh rằng

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| - |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq \frac{n^2 - 1}{4}$$

240. *Posted by manlio*

Cho tam giác  $ABC$  nằm trong đường tròn có bán kính  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . Chứng minh rằng

$$(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2) \leq a^4 b^4 c^4$$

241. *Posted by manlio*

Cho  $x_0 > x_1 > \dots > x_n$ . Chứng minh rằng

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq x_n + 2n$$

242. *Posted by harazi*

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $xyz = x + y + z + 2$ . Chứng minh rằng

(a)  $xy + yz + zx \geq 2(x + y + z)$

(b)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{3}{2}\sqrt{abc}$

243. *Posted by Lagrangia*

Chứng minh với mọi  $x \in R$  ta có

$$\left| \frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \right| \leq \frac{1}{4}$$

244. *Posted by Lagrangia*

Chứng minh với mọi  $x, y, z \in R$  ta có

$$\left( x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \right)^2 \leq \left( x^2 + y^2 + z^2 \right)^3$$

245. *Posted by manlio*

Chứng minh rằng với  $x, y, z$  thỏa  $x + y + z = 1$  và  $-1 \leq x, y, z \leq 1$  thì với mọi cặp cạnh tam giác  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức

$$(xa + yb + zc)(ya + zb + xc)(za + xb + yc) \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$$

246. *Posted by manlio*

Chứng minh rằng nếu  $a, b, c$  là các số thực dương và *không* là 3 cạnh tam giác thì

$$1 + \frac{x}{y+z-x} + \frac{y}{z+x-y} + \frac{z}{x+y-z} \leq 0$$

247. *Posted by manlio*

Cho các số thực  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Chứng minh bất đẳng thức

$$\left(\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n}\right)^2 \leq x_1\left(\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_n}{n}\right) + x_2\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \dots + \frac{x_n}{n+1}\right) + \dots + x_n\left(\frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n+1} + \dots + \frac{x_n}{2n-1}\right)$$

248. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là 3 cạnh tam giác. Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) \geq (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

249. *Posted by manlio*

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a_1^n + n - 1)(a_2^n + n - 1) \dots (a_n^n + n - 1) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^n$$

250. *Posted by manlio*

Cho  $n \geq 3$  và  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_2x_3}{x_4} + \dots + \frac{x_nx_1}{x_2} \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

251. *Posted by manlio*

Cho  $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$  và  $a + b + c + d = 1$ . Chứng minh rằng

$$a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 \leq 1$$

252. *Posted by liyi*

Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực dương thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1 + 1988} + \frac{1}{x_2 + 1988} + \dots + \frac{1}{x_n + 1988} = \frac{1}{1998}$$

253. *Posted by harazi*

Chứng minh rằng với  $a, b, c > 0$  ta có

$$\frac{a(2a + 3b + 3c)}{4a^2 + 3(b + c)^2} + \frac{b(2b + 3c + 3a)}{4b^2 + 3(c + a)^2} + \frac{c(2c + 3a + 3b)}{4c^2 + 3(a + b)^2} \leq \frac{3}{2}$$

254. *Posted by nickolas*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$$

255. *Posted by Lagrangia*

Chứng minh rằng  $\forall x, y, z \in R$  ta có

$$x(x+y)^3 + y(y+z)^3 + z(z+x)^3 \geq 0$$

256. *Posted by harazi*

Chứng minh rằng nếu  $x + y + z = 1$  và  $x, y, z > 0$  ta có

$$\sqrt{z+xy} + \sqrt{y+zx} + \sqrt{z+xy} \geq \sqrt{1+9(xy+yz+zx)}$$

257. *Posted by A1lqdSchool*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1$$

258. *Posted by Lagrangia*

Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

259. *Posted by harazi*

Cho  $x, y, z > 0$  và  $x + y + z = 1$ . Chứng minh

$$\frac{xy}{1-x^2y^2} + \frac{yz}{1-y^2z^2} + \frac{zx}{1-z^2x^2} < \frac{7}{20}$$

260. *Posted by nickolas*

Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2} < \sqrt{n}$$

261. *Posted by manlio*

Cho  $a, y, z$  là các số thực dương. Đặt  $s = x + y + z, a = y + z, b = z + x, c = x + y$ . Chứng minh rằng



(a)  $s^s x^x y^y z^z \leq a^a b^b c^c$

(b)  $s^{ss} x^{xx} y^{yy} z^{zz} \geq a^{aa} b^{bb} c^{cc}$

262. *Posted by harazi*

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Chứng minh rằng

$$12(a^4 + b^4 + c^4) \geq 27 + (2a^3 + 2b^3 + 2c^3 - a - b - c)^2$$

263. *Posted by pbornsztein*

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa  $xyz = 1$ . Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \geq 2(xy + yz + zx)$$

264. *Posted by harazi*

Cho  $a, b, c > 0$  chứng minh

$$2(a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{9}{4} + \left( 4 - \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2$$

265. *Posted by nickolas*

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa  $xyz = 1$ . Chứng minh

$$\frac{1}{1 + a + b} + \frac{1}{1 + b + c} + \frac{1}{1 + c + a} \leq 1$$

266. *Posted by nickolas*

Cho tam giác  $ABC$  và các số thực  $x, y, z$  thỏa  $x + y + z = 0$ . Chứng minh rằng

$$a^2 xy + b^2 yz + c^2 zx \leq 0$$

267. *Posted by Lagrangia*

Chứng minh rằng  $\forall a, b, c > 0$  ta có

$$\left( \frac{4a}{b+c} + 1 \right) \left( \frac{4b}{c+a} + 1 \right) \left( \frac{4c}{a+b} + 1 \right) > 25$$

268. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, b, c > 0$  chứng minh

$$\frac{x^2}{y(x^2 + xy + y^2)} + \frac{y^2}{z(y^2 + yz + z^2)} + \frac{z^2}{x(z^2 + zx + c^2)} \geq \frac{3}{x + y + z}$$

269. *Posted by harazi*

Cho  $a, b, c, x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a(y+z)}{b+c} + \frac{b(z+x)}{a+c} + \frac{c(x+y)}{a+b} \geq \sqrt{3(xy+yz+zx)}$$

270. *Posted by harazi*

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1 + \frac{a_1^2}{2}} \sqrt{1 + \frac{a_2^2}{2}} \cdots \sqrt{1 + \frac{a_n^2}{2}} \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

271. *Posted by hxtung*

Cho  $p, q$  là các số thực thỏa mãn  $p < q$  và  $n$  là số tự nhiên,  $x_k \in [p, q]$  với  $k = 1, 2, \dots, n$ . Chứng minh rằng

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \leq n^2 + K_n \left( \sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^2$$

trong đó  $K_n = n^2$  nếu  $n$  chẵn và bằng  $\frac{n^2-1}{4}$  nếu  $n$  lẻ.

272. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, b, c > 0$  chứng minh

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c}$$

273. *Posted by galois*

Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  thỏa  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = n$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + \cdots + \frac{x_n^n}{n}$$

274. *Posted by galois*

Cho  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$  với hệ số phức. Giả sử các nghiệm của  $P(x)$  là  $b_1, b_2, \dots, b_n$  thỏa mãn

$$|b_k| > 1 \quad (\forall k \leq j) \quad |b_k| \leq 1 \quad (\forall n \geq k > j)$$

Chứng minh rằng

$$|b_1|/|b_2| \cdots |b_j| \leq \sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}$$

trong đó  $|x|$  là modulo của số phức  $x$

275. *Posted by nickolas*

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa  $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

276. *Posted by harazi*

Chứng minh rằng với  $x, y, z > 0$  ta có

$$(a) \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$$

$$(b) \left(\frac{x}{y+z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z+x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x+y}\right)^2 \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$$

277. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a \geq b \geq c > 0$  và  $n \in \mathbb{N}$ . Chứng minh rằng

$$a^n b(a-b) + b^n c(b-c) + c^n a(c-a) \geq 0$$

278. *Posted by Namdung*

Chứng minh rằng nếu  $n$  không là số *chính phương* ta có

$$|(\sqrt{n} + 1) \sin(\sqrt{n}\pi)| > \frac{\pi}{2}$$

Chứng minh rằng  $\frac{\pi}{2}$  là giá trị *tốt nhất*

279. *Posted by harazi*

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = \frac{3}{2}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{x+y+z}{2} + 2\left(\frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x}\right) \geq \frac{9}{2}$$

280. *Posted by Viet Math*

Cho  $a, b, c, n$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{na+b}{na+c} + \frac{nb+c}{nb+a} + \frac{nc+a}{nc+b} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

281. *Posted by Lagrangia*

Nếu  $x_1, x_2, x_3 \in [0, 1]$  chứng minh rằng  $(x_1 + x_2 + x_3 + 1)^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$

282. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, b, c \in (0, 1)$ . Chứng minh rằng

$$4(a^2 + b^2 + c^2) \geq 8 - 9abc$$

283. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, b, c \in R$  thỏa  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$10|a^3 + b^3 + c^3 - 1| \leq 9|a^5 + b^5 + c^5 - 1|$$

284. *Posted by Lagrangia*

Cho  $0 < a < b$  và  $a, b, c \in [a, b]$ . Chứng minh rằng

$$9 \leq (a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq \frac{(2a + b)(2b + a)}{ab}$$

285. *Posted by nickolas*

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c+1} + \frac{bc}{a+1} + \frac{ca}{b+1} \leq \frac{1}{4}$$

286. *Posted by Tung Lam*

Chứng minh rằng

$$(a + b - c)^2(b + c - a)^2(c + a - b)^2 \geq (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)$$

287. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 4(ab + bc + ca)$$

288. *Posted by Fedor Petrov*

Cho  $a, b, c, d > 0$  chứng minh

$$\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{cd} \leq \sqrt[3]{(a + b + c)(a + c + d)}$$

289. *Posted by nickolas*

Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n$  và  $y_1, y_2, \dots, y_n$  là các số thực dương thỏa mãn

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$$

Chứng minh rằng

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leq 2|1 - (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)|$$

290. *Posted by Sung-yoon Kim*

Cho  $f$  là hàm số lồi trên  $I$ . Chứng minh rằng

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq 2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right)$$

291. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a \geq b \geq c > 0$  chứng minh rằng

$$\frac{a^3b}{a^3+b^3} + \frac{b^3c}{b^3+c^3} + \frac{c^3a}{c^3+a^3} \geq \frac{ab^3}{a^3+b^3} + \frac{bc^3}{b^3+c^3} + \frac{ca^3}{c^3+a^3}$$

292. *Posted by Lagrangia*

Chứng minh rằng với  $x, y, z > 0$  ta có

$$\sqrt{\frac{x+y}{x+z}} + \sqrt{\frac{x+z}{x+y}} \leq \frac{y+z}{\sqrt{xyz}}$$

293. *Posted by Namdung*

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có

(a)

$$\frac{a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4}{a^2b^2c^2} \geq 9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

(b)

$$\left(\frac{r_a}{a}\right) + \left(\frac{r_b}{b}\right) + \left(\frac{r_c}{c}\right) \geq \frac{9}{4}$$

294. *Posted by manlio*

Cho các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $0 \leq a \leq b \leq c \leq 3$ . Chứng minh rằng

$$(a-b)(a^2-9) + (a-c)(b^2-9) + (b-c)(c^2-9) \leq 36$$

295. *Posted by nickolas*

Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq 1$$

296. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$  thỏa

$$\begin{aligned} \star a + b + c + d + e &= 8 \\ \star a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 &= 16 \end{aligned}$$

Tìm giá trị lớn nhất của  $e$

297. *Posted by Tung Lam*

Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$  và  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_1^4 - x_2^4 - \dots - x_n^4$$

298. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$3 \leq \frac{a^2 + b^2}{ab + c^2} + \frac{b^2 + c^2}{bc + a^2} + \frac{c^2 + a^2}{ca + b^2} < 4$$

299. *Posted by Lagrangia*

Cho  $x, y, z, t \in [-1, \infty)$  và  $x + y + z + t = 2$ . Chứng minh rằng

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 \geq \frac{1}{2}$$

300. *Posted by nickolas*

Cho  $0 \leq a, b, c \leq 1$ . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1$$

301. *Posted by Lagrangia*

Cho  $x, y, z \in [0, 1]$ . Chứng minh rằng

$$\frac{x}{yz + 1} + \frac{y}{zx + 1} + \frac{z}{xy + 1} \leq 2$$

302. *Posted by Lagrangia*

Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_2} + \dots + \frac{1}{1 + x_n} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}$$

303. *Posted by harazi*

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $\max(a, b, c) < 2 \min(a, b, c)$  chứng minh rằng

$$27a^2b^2c^2 \geq (2b - a)(2c - b)(2a - c)(a + b + c)^3$$

304. *Posted by manlio*

Chứng minh rằng trong mọi tam giác  $ABC$  ta có

$$m_a(bc - a^2) + m_b(ca - b^2) + m_c(ab - c^2) \geq 0$$

305. *Posted by Lagrangia*

Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  thỏa  $a \geq b \geq c$ . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq \frac{7}{3}(a - b)(b - c)$$

306. *Posted by harazi*

Cho  $x, y, z > 0$  thoả  $xy + yz + zx + xyz = 4$ . Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 \geq (x + 2)(y + 2)(z + 2)$$

307. *Posted by wpolly*

Cho  $x \in [1.5, 5]$ . Chứng minh rằng

$$\left(\sqrt{2x - 3} + \sqrt{15 - 3x} + \sqrt{x + 1}\right)^2 < 71.25$$

308. *Posted by nickolas*

Cho  $a, b, c > 0$  và  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1 + a + b} + \frac{1}{1 + b + c} + \frac{1}{1 + c + a} \leq \frac{1}{2 + a} + \frac{1}{2 + b} + \frac{1}{2 + c}$$

309. *Posted by Namdung*

Cho  $x_1, x_2, \dots, x_{2004}$  là các số thực thỏa  $-1 \leq x_i \leq 1$  với  $i = 1, 2, \dots, 2004$  thoả mãn  $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{2004}^3 = 0$ . Tìm giá trị lớn nhất của

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2004}$$

310. *Posted by manlio*

Cho  $x_i, y_i$  với  $i = 1, 2, \dots, n$  là  $2n$  số thực dương thoả mãn  $x_i + y_i = 1$ . Chứng minh rằng

$$(1 - x_1 x_2 \cdots x_n)^m + (1 - y_1^m)(1 - y_2^m) \cdots (1 - y_n^m) \geq 1$$

311. *Posted by harazi*

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa  $ab + bc + ca = 3$ . Chứng minh rằng

$$a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c \geq 1 - abc$$

312. *Posted by xxxxtt*

Cho  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$$

313. *Posted by khoa*

Cho  $a, y, x, t > 0$  thoar  $xy + xz + xt + yz + yt + zt = 6$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{x^4 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{y^4 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{z^4 + 1}{2}} \leq x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

314. *Posted by Lagrangia*

Cho hàm số  $f : R \rightarrow (0, \infty)$  là hàm tăng nghiêm ngặt. Giả sử rằng  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Chứng minh rằng

$$\frac{f(a_1)}{f(a_2)} + \frac{f(a_2)}{f(a_3)} + \dots + \frac{f(a_n)}{f(a_1)} \geq \frac{f(a_2)}{f(a_1)} + \frac{f(a_3)}{f(a_2)} + \dots + \frac{f(a_1)}{f(a_n)}$$

315. *Posted by harazi*

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực thỏa  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$ . Chứng minh rằng

$$n + 1 \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)$$

316. *Posted by Namdung*

Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho với mọi cặp số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^2 > bc$  ta có bất đẳng thức

$$(a^2 - bc)^2 > k(b^2 - ca)(c^2 - ab)$$

317. *Posted by nickolas*

Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq \frac{(a + b + c)^3}{4}$$



318. *Posted by khoa*

Cho  $a, b, c > 0$  và  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

(a)  $\sqrt{8a^2 + 1} + \sqrt{8b^2 + 1} + \sqrt{8c^2 + 1} \leq 3(a + b + c)$

(b) Tổng quát với  $0 \leq k \leq 8$  ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{ka^2 + 9 - k} + \sqrt{kb^2 + 9 - k} + \sqrt{kc^2 + 9 - k} \leq 3(a + b + c)$$

(c) Tìm số  $k$  lớn nhất để bất đẳng thức trên đúng

319. *Posted by khoa*

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}} = 3$ . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 21 \geq \sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{(b+c)(b+a)} + \sqrt{(c+a)(c+b)}$$

320. *Posted by nickolas*

Cho  $a, b, c \geq 0$  sao cho  $2 \max(a^2, b^2, c^2) \leq a^2 + b^2 + c^2$ . Chứng minh rằng

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) \geq 4(a^6 + b^6 + c^6)$$

321. *Posted by Lagrangia*

Cho  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_1 a_n} \left( n(a_1 + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \right)$$

322. *Posted by Maverick*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$a^2(2a + b) + b^2(2b + 3) + c^2(2c + 3) \geq 3(9abc - 1)$$

323. *Posted by Namdung*

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa  $x + y + z = xyz$ . Chứng minh rằng

$$3125x^6 y^4 z^2 \leq 729(1 + x^2)^3 (1 + y^2)^2 (1 + z^2)$$

324. *Posted by Arrne*

Cho  $a, b, c$  thỏa  $a + b + c = 0$ . Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 > 0 \Leftrightarrow a^5 + b^5 + c^5$$

325. *Posted by Gil*

Cho  $a, b, c > 0$  chứng minh rằng

$$(a_2 + b_2 + c_2)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) \leq abc(ab + bc + ca)$$

326. *Posted by harazi*

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c \leq 3$ . Chứng minh bất đẳng thức

$$9\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 3 \geq \frac{8(a + b + c)}{abc}$$

327. *Posted by harazi*

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$(a^2 + b^2)\left(\frac{2ab}{a + c} - c\right) + (b^2 + c^2)\left(\frac{2bc}{b + a} - a\right) + (c^2 + a^2)\left(\frac{2ca}{c + b} - b\right) \geq 0$$

328. *Posted by A1lqdSchool*

Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa  $x + y + z = 2$ . Chứng minh rằng

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq 1 + \frac{x^4 + y^4 + z^4}{2}$$

329. *Posted by Namdung*

Cho  $x, y, z$  là các số thực thỏa mãn  $(x + y + z)^3 = 32xyz$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{x^4 + y^4 + z^4}{x + y + z}$$

330. *Posted by arosisi*

Chứng minh rằng

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq 2 + 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq 2$$

331. *Posted by darij grinberg*

Cho  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$  là các số nguyên dương thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{100}} = 20$$

Chứng minh rằng có ít nhất hai số bằng nhau

332. *Posted by manlio*

Cho  $a \geq b \geq c \geq d$ . Chứng minh rằng

$$(a + b + c + d)^2 \geq 8(ac + bd)$$

333. *Posted by Arrne*

Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực  $a, b, c$

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca)$$

334. *Posted by Lagrangia*

Chứng minh rằng với  $\forall x, y, z > 0$  ta có bất đẳng thức

$$\frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)} \leq \frac{9}{4(x+y+z)}$$

335. *Posted by manlio*

Chứng minh rằng với mọi số thực  $x, y, z$  ta có

$$(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq xyz(x + y + z)^3$$

336. *Posted by arosisi*

Cho  $a, b, c \geq 0$  và thỏa mãn điều kiện tồn tại căn thức. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{4-y+x} + \sqrt{9-z+y} + \sqrt{16+z} \leq 10$$

337. *Posted by harazi*

Các số thực  $a, b, c, d$  thỏa mãn  $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1) = 16$ . Chứng minh rằng

$$ab + bc + cd + da + ac + bd \leq 5 + abcd$$

338. *Posted by sigma*

Cho các số thực dương  $a, b, c, d$  thỏa  $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) = 1$ . Chứng minh rằng

$$(2a+b+c)(2b+c+d)(2c+d+a)(2d+a+b)a^2b^2c^2d^2 \leq \frac{1}{16}$$

339. *Posted by georg*

Cho  $a, b, c$  là các số thực lớn hơn 1 thỏa  $ab + bc + ca = 2abc$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}$$

340. *Posted by Anh Cuong*

Cho  $x \geq y \geq z \geq 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) - xy - yz - zx$$

341. *Posted by treegoner*

Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn  $ABC$  ta có

$$\frac{a^6 + b^6 + c^6}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \geq R^2$$

342. *Posted by hxtung*

Cho  $a, b, c$  là các số thuiực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$$

343. *Posted by romano*

Chứng minh rằng trong mọi tam giác nhọn  $ABC$  ta có

$$(\cos A)^3 + (\cos B)^3 \geq 2\left(\cos \frac{A+B}{2}\right)^2$$

344. *Posted by Minh Thang*

Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng

$$\frac{9}{4} \geq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \frac{1}{3} \left( \frac{m_a - m_b}{c} + \frac{m_b - m - c}{a} + \frac{m_c - m_a}{b} \right) \geq 2$$

345. *Posted by fuzzylogic*

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$$

346. *Posted by Fierytycoon*

Cho  $a_i \geq 1$  với  $i = 1, 2, \dots, n$ . Chứng minh rằng

$$(1 + a_1)(2 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq \frac{2^n}{n+1} (1 + a_1 + b_1 + \cdots + a_n)$$

347. *Posted by ThAzN1*

Chứng minh rằng với  $x, y, z > 0$  ta có

$$\frac{x^2 + 1}{(x + y)(x + z)} + \frac{y^2 + 1}{(y + z)(y + x)} + \frac{z^2 + 1}{(z + x)(z + y)} \geq \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2}{2(x^2 + y^2 + z^2)}$$

348. *Posted by wpolly*

Cho các số  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  thỏa mãn

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = 1$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{4 + a_1^2} + \frac{a}{4 + a_2^2} + \frac{a}{4 + a_3^2} + \frac{a}{4 + a_4^2} + \frac{a}{4 + a_5^2} \leq 1$$

349. *Posted by xtar*

Cho  $x, y, z > 0$  chứng minh rằng

$$\frac{1}{3} \left( x + \frac{y^2}{x} + \frac{z^3}{y^2} \right) \left( \frac{x + y}{2} \right)^2 \geq \left( \frac{x + y + z}{3} \right)^3 \geq z \left( \frac{x + y}{2} \right)^2$$

350. *Posted by manlio*

Cho  $a, b, c$  là 3 cạnh tam giác và  $x, y, z$  là các số thực. Chứng minh rằng

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 \geq xy(a^2 + b^2 - c^2) + yz(b^2 + c^2 - a^2) + zx(c^2 + a^2 - b^2)$$

351. *Posted by harazi*

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 6$  và  $a + b + c \geq 2 + \max(a, b, c)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\sqrt{4 - a^2} + \sqrt{4 - b^2} + \sqrt{4 - c^2}$$

352. *Posted by MM.Karim*

Cho  $1 > a, b, c > -1$ . Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca + 1 > 0$$

353. *Posted by Heman*

354. *Posted by TonyCui*

Cho  $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ . Chứng minh rằng

$$\sin \ln \sin x < \cos \ln \cos x$$

355. *Posted by nickolas*

Chứng minh rằng trong mọi tam giác  $ABC$  ta có

$$\frac{m_a m_b}{ab} + \frac{m_b m_c}{bc} + \frac{m_c m_a}{ca} \geq \frac{9}{4}$$

356. *Posted by ThAzN1*

Cho  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a + bc + 3abc} + \frac{1}{b + ca + 3abc} + \frac{1}{c + ab + 3abc} \geq \frac{2}{ab + bc + ca + abc}$$

357. *Posted by TonyCui*

Cho  $x, y > 0$ . Chứng minh rằng

$$x^x + y^y \geq x^y + y^x$$

358. *Posted by keira-khtn*

Cho  $a, b, c$  là các số thực. Chứng minh rằng

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3$$

359. *Posted by cuong*

Cho  $a, y, z > 0$  thỏa  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{x + \frac{(y-z)^2}{12}} + \sqrt{y + \frac{(z-x)^2}{12}} + \sqrt{z + \frac{(x-y)^2}{12}} \leq \sqrt{3}$$

360. *Posted by keira-khtn*

Cho  $x > 0$  hãy tìm giá trị nhỏ nhất

$$S = x^x$$

361. *Posted by RNecula*

Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng

$$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{m_a + m_b + m_c} \geq \frac{3S}{2}$$

362. *Posted by manlio*

Cho  $x, y, z$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(xy + yz + zx) \left( \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

363. *Posted by phuchung*

Chứng minh rằng

$$\frac{\cos A}{1 - \cos A} + \frac{\cos B}{1 - \cos B} + \frac{\cos C}{1 - \cos C} \geq 3$$

364. *Posted by romano*

Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực. Chứng minh rằng

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + n\sqrt{x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2} \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

365. *Posted by bénabar*

Chứng minh rằng với  $R > 0$  ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin x} dx \leq \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R})$$

366. *Posted by amir2*

Chứng minh trong mọi tam giác ta có

$$\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A} + \frac{1 - \sin B}{1 + \sin B} + \frac{1 - \sin C}{1 + \sin C} \leq 1$$

367. *Posted by nickolas*

Chứng minh trong mọi tam giác  $ABC$  ta có

$$\frac{R}{2r} \geq \frac{m_a}{h_a} \geq \frac{1}{2} \left( \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right)$$

368. *Posted by Mamat*

Chứng minh với mọi  $a, b, c > 0$  ta có

$$\frac{a}{7 + b^3 + c^3} + \frac{b}{7 + a^3 + c^3} + \frac{c}{7 + a^3 + b^3} \leq \frac{1}{3}$$

369. *Posted by nthd*

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số tự nhiên phân biệt và số thực cho trước  $x \geq 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$E = \frac{a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \dots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}$$

370. *Posted by mahbub*

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $k, n$  thỏa  $1 \leq k \leq 2n$  ta có

$$\binom{2n+1}{k-1} + \binom{2n+1}{k+1} \geq 2 \cdot \frac{n+1}{n+2} \dots \binom{2n+1}{k}$$

371. *Posted by cezar*

Dãy số  $\{a_n\}$  được định nghĩa như sau  $x_1 > 0$  và

$$x(n+1) = \frac{x_1}{n+1} + \frac{x_2}{n+2} + \dots + \frac{x_n}{n+n}$$

Chứng minh rằng  $x_n$  hội tụ về 0.

372. *Posted by Lagrangia -BDT Karamata*

Cho 2 dãy số  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  và  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$  thỏa mãn

- \*  $x_1 \geq y_1$
- \*  $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$
- \*  $\dots$
- \*  $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \geq y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}$
- \*  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$

Khi đó với mọi hàm số lồi  $f$  ta đều có

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_n)$$

373. *Posted by hxtung*

Cho  $a, b, c > 0$  chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geq 1 \geq \frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ac}{b^2 + 2ac} + \frac{ba}{c^2 + 2ba}$$

374. *Posted by minhkhoe*

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa  $ab + bc + ca = 3$ . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq a + b + c + 1$$



375. *Posted by galois*

Cho tam giác  $ABC$  chứng minh rằng

$$\sin A + \sin B + \sin C > 2$$

376. *Posted by Viet Math*

Chứng minh rằng nếu  $a, b, c$  là các số thực dương ta có

$$\sqrt{a^4 + b^4 + c^4} + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \geq \sqrt{a^3b + b^3c + c^3a} + \sqrt{ab^3 + bc^3 + ca^3}$$

377. *Posted by levi*

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa  $xy + yz + zx + xyz = 4$ . Chứng minh rằng

$$1 + x + y + z \leq x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

378. *Posted by silouan*

Cho  $a, b, c, x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{x^n}{(y+z)^m} + \frac{y^n}{(z+x)^m} + \frac{z^n}{(x+y)^m} \geq \frac{x^{n-m} + y^{n-m} + z^{n-m}}{2^m}$$

379. *Posted by romano*

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Chứng minh rằng

(a)

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} \geq \frac{3}{2}$$

(b)

$$\frac{a}{2+b} + \frac{b}{2+c} + \frac{c}{2+a} \leq 1$$

Sẽ tiếp tục được cập nhật ...