

Một số bất đẳng thức 4 biến

Tất cả các bất đẳng thức dưới đây đều có thể giải dễ dàng nhờ **FPMX**. Nhưng trước khi tìm hiểu về phương pháp này, các bạn hãy thử sức với chúng xem sao!



Bài 0.0.1. (Bất đẳng thức Tukervici)

Cho $a, b, c, d > 0$, ta có

$$3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 4abcd \geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$



Bài 0.0.2. (Bất đẳng thức Suranyi cho 4 số)

Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh

$$3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 4abcd \geq (a + b + c + d)(a^3 + b^3 + c^3 + d^3).$$



Bài 0.0.3. (Trần Lê Bách)

Cho 4 số thực dương a, b, c, d . Chứng minh rằng

$$2(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \geq \sum_{cyclic} abc(a + b + c - d)$$



Bài 0.0.4. (Trần Lê Bách-Vasile Cirtoaje) - Một mở rộng của bất đẳng thức Schur

Cho 4 số thực không âm a, b, c, d . Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 8abcd \geq \sum_{cyclic} abc(a + b + c)$$



Bài 0.0.5. (Vasile Cirtoaje)

Cho a, b, c, d là các số thực không âm và $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng

$$4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 15(abc + bcd + cda + dab) \geq 1$$

**Bài 0.0.6. (Vasile Cirtoaje)**

Cho a, b, c, d là các số thực không âm và $a + b + c + d = 3$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3(abc + bcd + cda + dab) \geq 6$$

**Bài 0.0.7. (Vasile Cirtoaje)**

Cho a, b, c, d là các số thực không âm và $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd \geq 16$$

**Bài 0.0.8. (Trần Lê Bách)**

Cho a, b, c, d là các số thực không âm và $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 8abcd \geq 2 \sum_{\text{cyc}} abc(a + b + c)$$

**Bài 0.0.9. (Trần Lê Bách)**

Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $abcd = 1$. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} 8 + \sqrt[4]{(a^8 + b^6 + c^2 + 1)(b^8 + c^6 + d^2 + 1)(c^8 + d^6 + a^2 + 1)(d^8 + a^6 + b^2 + 1)} &\geq \\ &\geq \sum_{\text{cyc}} \frac{a + b + c}{d} \end{aligned}$$

**Bài 0.0.10. (Trần Lê Bách)**

Cho a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng

$$1 \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 21\frac{1}{3}abcd \geq \frac{1}{3}$$