Tác giả:Vũ Minh Thắng,Nguyễn Thế Anh,K41, ĐHSPHN

Look at the end point

Nhìn vào điểm mút
*** ************

Ta mở đầu phương pháp này bằng hai định lý sau:

Định lý 1 Nếu f(x) là hàm bậc nhất theo x thì : nếu $f(a)\geq 0, f(b)\geq 0$ khi đó $f(x)\geq 0$ với mọi x$\in [a,b]$

Định lý 2 : Nếu$f(x)$ là hàm bậc nhất theo x thì : $min\{f(a);f(b)\}\leq$ f(x) $\leq$ $max\{f(a);f(b)\}$với mọi x$\in [a,b]$

Định lý 3

Nếu $f(x)$là một hàm số lồi dưới trên khoảng $[a;b]$thì
$[a;b]$

Nếu $f(x)$là một hàm số lõm dưới trên khoảng $[a;b]$thì
$f(x)\geq min\{f(a);f(b)\}$

Đối với bậc THCS,chưa học hàm lồi,hàm lõm thì ta có thể sử dụng định lý sau đối với hàm bậc 2:

Định lý 4:

Cho $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ và $x\in[\alpha;\beta]$

Khi đó $f(x)$đạt max,min tại $x=\alpha$ hay $x=\beta$ hoặc $x=\frac{S}{2}$ với $S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}$

Các tính chất hàm bậc nhất trên đây có tính minh họa hình học rất tường minh và dễ hiểu. Vận dụng các tính chất này ta có thể Cm được nhiều BDT hay và khó.

Ví dụ 1 Cho $x,y,z,\in[0,2]$

Chứng minh rằng $2(x+y+z)(xy+yz+xz)\leq 4$ **(*)**

Lời Giải:BDT**(*)**

<=> $(2-y-z)x+2(y+z)-yz-4\leq 0$

Xét $f(x)=(2-y-z)x+2(y+z)-yz-4$ với $x\in[0,2]$

Theo định lý thì $f(x)\leq max\{f(0);f(2)\}$

Ta có $f(0)=-(2-y)(2-z)\leq 0$

$f(2)=-yz\leq 0$

=> f(x)$\leq$ 0với x$\in$ [0,2](dpcm)

Ví dụ 2 Choa,b,c,d $\in$CM BDT:

$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+a+b+c+d\geq 1$

Lời giải

Cách 1: Cố định b,c,d xét hàm bậc nhất

$f(a)=(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+a+b+c+d-1$

$f(1)=b+c+d\geq 0$

$f(0)=(1-b)(1-c)(1-d)+b+c+d-1$
Cố định c,d xét :
$f(b)=(1-b)(1-c)(1-d)+b+c+d-1$
$f(1)=c+d\geq 0$
$f(0)=(1-c)(1-d)+c+d-1=cd\geq 0$
0
=> $f(b)\geq 0$ với mọi $b\in[0;1]$
Cách 2:(Nguyễn Thế Anh)
Đặt $b\in[0;1]$
=> $S=f(a)=(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+a+b+c+d-1$ tại $a=0$ hoặc $a=1$
Vậy để S đạt giá trị nhỏ nhất thì a $a=0$ $0;1\}$ tương tự b $\in\{0;1\}$, c $\in\{0;1\}$, $d\in\{0;1\}$
Nếu có 1 số bằng 1 thì S ≥ 0
Nếu cả 4 số bằng 0 thì $S=0$

<u>Ví dụ 3:</u>
Cho $a;b;c;A;B;C\geq 0$ thỏa mãn:
$a+A=b+B=c+C=1$
Chứng minh rằng:
$aB+bC+cA\leq 1$

Lời giải:
Đặt $f(a)=aB+bC+cA=a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)=a+b+c-ab-bc-ca$
=> $f(a)\leq max\{f(0);f(1)\}$
Lại có $f(0)=b+c-bc$
$f(0)\leq 1$ <=> $(b-1)(1-c)\leq 0$,đúng
$f(1)=1-bc\leq 1$
Từ đó ta có đpcm

<u>Ví dụ 4</u> (IMO) : Cho 3 số dương x,y,z thỏa mãn x,y,z
CMBDT: $xy+yz+xz-2xyz\leq\frac{7}{27}$
<u>Lời Giải</u>
$xy+yz+xz-2xyz=x(y+z)+yz-2xyz$
Cố định x xét $f(yz)=x(1-x)+yz-2xyz-\frac{7}{27}$
Ta có $yz\leq\frac{(y+z)^2}{4}=\frac{(1-x)^2}{4}$
=> $yz\in[0;\frac{(1-x)^2}{4}]$
$f(0)=x(1-x)-\frac{7}{27}=-x^2+x-\frac{7}{27}$
$<-(x^2-x+\frac{1}{4})=-(x-\frac{1}{2})^2\leq 0$ => f(0)<0
$f(\frac{(1-x)^2}{4})=x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{4}-2\frac{(1-x)^2}{4}-\frac{7}{27}=\frac{-1}{2}(x-\frac{1}{3})^2(x+\frac{1}{6})\leq 0$

vậy $f(\frac{(1-x)^2}{4}) \leq 0$ => dpcm:

Ví dụ 5:

Cho $x;y;z>0;x+y+z=1$.Chứng minh rằng:

$4(x^3+y^3+z^3)+15xyz\geq 1$

Lời giải:

Ngoài phương pháp đồng bậc,ta có thể giải bài toán này bằng Look at the end point như sau:

Ta có:

$4(x^3+y^3+z^3)+15xyz-1=4[(x+y)^3-3xy(x+y)]+4z^3+15xyz-1$

$=4[(1-z)^3-3xy(1-z)]+z^3+15xyz-1$

$=4(1-z)^3+12xy(z-1)+4z^3+15xyz-1$

$=f(xy)=xy(27z-12)+4z^3+4(1-z)^3-1$

Do $0\leq xy\leq \frac{(1-z)^2}{4}$

=> $f(xy)\geq min\left\{f(0);f(\frac{(1-z)^2}{4})\right\}$

$f(0)=3(2z-1)^2+1>0$

$f(\frac{(1-z)^2}{4})=(1-z)^2(\frac{19}{4}-z)\geq 0$

Từ đó ta có đpcm

Ví dụ 6 Cho 3 số ko âm a,b,c thỏa mãn $x+y+z=1$

Chứng minh rằng $x^3+y^3+z^3+6xyz\geq \frac{1}{4}$

Lời giải:

Cách 1:

Ta có thể giải bài toán này theo cách đơn giản như sau:

Đưa BDT cần chứng minh về dạng:

$4(x^3+y^3+z^3+6xyz)\geq (x+y+z)^3$

<=> $x^3+y^2+z^3+6xyz\geq xy(x+y)+yz(x+z)+xz(x+z)$

BDT này hiển nhiên đúng theo BDT Schur

Cách 2:

Xét $x^3+y^3+z^3+6xyz-\frac{1}{4}$

$=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3+6xyz-\frac{1}{4}$

$=xy(9z-3)+3z^2-3z+\frac{3}{4}$

Đến đây thì bài toán trở nên đơn giản,chú ý rằng $0\leq xy\leq \frac{(1-z)^2}{4}$

Các bạn tự làm nốt coi như là bài tập

Ví dụ 7 (post by huyclvc)
Cho $a,b,c\ge 0$ chứng minh :

$$\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\le max((\sqrt{a}-\sqrt{b})^2,(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2,(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2)$$

Chúng ta đã có 3 lời giải cho BDT này:
Lời giải 1:(mather)
Giả sử
$$max((\sqrt{a}-\sqrt{b})^2,(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2,(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2)=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$
$$max((\sqrt{a}-\sqrt{b})^2,(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2,(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2)=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$
$$f(a,b,c)=\mathbf{VP}-\mathbf{VT}$$
$$f(a,b,c)-f(t,t,c)=\frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{3}\ge 0$$
Theo định lý dồn biến ta có
$$f(a,b,c)\ge f(t,t,t)=0(t=\sqrt[3]{abc})$$

Lời giải 2:(ThaithuanGC)
Phá Max trước. Giả sử $a\ge b\ge c$.
Đặt : $a=x^6;b=y^6;c=z^6$
BDT tương đương :
$$\sum x^6-3x^2y^2z^2\le 3(x^3-z^3)^2$$
$$<=>\frac{1}{2}(\sum x^2)[(x^2-y^2)^2+(y^2-z^2)^2+(z^2-x^2)^2]\le 3(x^3-z^3)^2$$
Ta sử dụng 1 BDt thường được dùng trong tiêu chuẩn 2 của S.O.S :
$$x^2\ge y^2\ge z^2=>(z^2-x^2)^2\ge(x^2-y^2)^2+(y^2-z^2)^2$$
Do đó BDT cần cm tương đương :
$$(\sum x^2)(x^2-z^2)^2\le 3(x^3-z^3)^2$$
$$<=>(\sum x^2)(x+z)^2\le 3(x^2+xz+z^2)^2$$
bắn tung toé ; ra là ok!
mà hình như cái BDT này còn yếu !

Lời giải 3(posted by huyclvc)
Đi từ bất đẳng thức : $a^3+b^3+c^3+3abc\ge\sum a^2b$.
Đưa tới bất đẳng thức $a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ge 2(ab+bc+ca)$.
Đưa tới bất đẳng thức $a+b+c+3\sqrt[3]{abc}\ge 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$
Từ đó có điều sau
$$\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\le\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2}{3}\le max(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2,\sqrt{b}-\sqrt{c})^2,(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2)$$
Cái gì nó cũng có ngọn nguồn của nó cả

Và tất nhiên ta cũng có thể xử lý bài toán này bằng Look at the end point

Giả sử $a \le b \le c$
Lúc đó ta cần CM
$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \le (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2$
Coi đây là 1 hàm số biến b,xét
$f(x) = \frac{1}{3}(x+a+c) - \sqrt[3]{xac}$
=>$f(x) \le max\{f(a); f(c)\}$
Giả sử $f(a) \ge f(c)$
$f(a) \ge f(c)$
Ta CM $f(a) \le (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2$
<=>$-\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}c - \sqrt[3]{a^2c} + 2\sqrt{ac}$
Chú ý rằng $a+c+c+\sqrt[3]{a^2c}+\sqrt[3]{a^2c}+\sqrt{a^2c} \ge 6\sqrt[6]{a^3c^3} = 6\sqrt{ac}$
Ta có đpcm

Để hiểu rõ hơn về phương pháp này,ta xét thêm ví dụ sau:
Ví dụ 8:(chien than)
Cho $a_1; a_2; ...; a_{19} \in [-98; 98]$
Tìm min của $S = a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{19}a_1$
Lời giải:
VT đạt min tại $a_i \in \{98; -98\}$
Xét 19tích $a_i \in \{98; -98\}$nhận 2 dấu $+; -$
=>tồn tại 1 tích nhận giá trị dương
Giả sử $a_1a_2 > 0$=>$a_1a_2 = 98^2$
=>$S = 98^2 + a_1a_3 + ... + a_{19}a_1$
Ta thấy a_ia_{i+1}nhỏ nhất là -98^2
=>$S \ge 98^2 - 98^2 - 98^2 - ... - 98^2 = -17.98^2$
=>$minS = -17.98^2$
Đẳng thức xảy ra ví dụ như $a_1a_2 = 98; a_3 = -98; a_4 = 98; ...; a_{18} = 98; a_{19} = -98$

Bây giờ ta sẽ trở lại xét bài toán quen thuộc:
Ví dụ 9:
Cho $a; b; c \in [0; 1]$.Chứng minh:
$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \le 1$

Chúng ta có thể dễ dàng kill bài này bằng cách sử dụng BDT AM-GM(Cauchy)
Giả sử $a = max\{a; b; c\}$
Ta có:
$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c+1} \le \frac{a+b+c}{b+c+1}$

Ta cần CM $(1-a)(1-b)(1-c)\le\frac{1-a}{b+c+1}$
Đây là hệ quả trực tiếp của BDT AM-GM và ta có đpcm
Và sau đây,ta sẽ giải bài toán này bằng Look at the end point
Vẫn giả sử $a=max\{a;b;c\}$
Gọi T là VT của BDT
Ta có: $T\le\frac{a+b+c}{b+c+1}+(1-a)(1-b)(1-c)$
Xét $T\le max\{f(0);f(1)\}$
Lại có $f(1)=0$
$f(0)=\frac{b+c}{b+c+1}+(1-b)(1-c)-1$
$=\frac{bc(b+c)-(b^2+c^2)-bc-1}{1+b+c}\le\frac{(b^2+c^2)(\frac{b+c}{2}-1)-bc-1}{1+b+c}$
=> $f(0)<0$ =>đpcm

Ví dụ 10:
Cho $x;y;z;t\in[0;1]$.Chứng minh:
$x^2y+y^2z+z^2t+t^2x-(xy^2+yz^2+zt^2+tx^2)\le\frac{8}{27}$
Proof:
Xét $y\ge t$,các TH còn lại tương tự:
$f(x;y;z;t)=(y-t)x^2+(t^2-y^2)x+y^2z+z^2t-yz^2-yt^2$
Dễ thấy đây là hàm số lồi,ta có:
$f(x;y;z;t)\le max\{f(0;y;z;t);f(1;y;z;t)\}$
Ta có $f(0;y;z;t)=z(y-t)(y+t-z)$
Nếu $y+z-t<0$ thì BDT hiển nhiên đúng,còn nếu $y+t-z>0$ thì AM-GM:
$y+t-z>0$
Đẳng thức xảy ra khi $(x;y;z;t)=(0;1;\frac{2}{3};\frac{1}{3})$
Ta lại có:
$f(1;y;z;t)=(1-z)t^2+(z^2-1)t+t+y^2z-y^2-yz^2$
Dễ thấy đây là hàm lồi trên đoạn $[0;1]$ nên ta có:
$f(1;y;z;t)\le max\{f(1;y;z;1);f(1;y;z;0)\}$
Từ đó ta có đpcm

Ví dụ 11: (posted by ThaithuanGC)
$a;b;c>0;a+b+c=3$
Lúc đó $a^2+b^2+c^2+abc\ge 4$
Lời giải(chien than)
Ta sử dụng phương pháp Look at the end point
Ta có:
$f(ab)=a^2+b^2+c^2+abc-4=ab(c-2)+2c^2-6c+5$
Ta có:

$3=a+b+c\geq 2\sqrt{ab}+c$=> $ab\leq\frac{(z-3)^2}{4}$

=> $f(xy)\geq min\left\{f(0);f(\frac{(z-3)^2}{4})\right\}$

Lại có $f(0)=2(z-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{2}>0$

$f(\frac{(z-3)^2}{4})=\frac{1}{4}(z-1)^2(z+2)\geq 0$

=>đpcm

Cuối cùng,mời các bạn làm một số bài tập áp dụng:

Bài 1:

Cho $a;b;c\geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$.Chứng minh:

$7(ab+bc+ca)\leq 2+9abc$

(thông thường ta giải BDT này như sau:

BDT<=> $7(ab+bc+ca)(a+b+c)\leq 2(a+b+c)^3$

⇔ $2(a^3+b^3+c^3)\geq\sum_{cyc}ab(a+b)$

Lại có $2(a^3+b^3+c^3)\geq a^3+b^3+c^3+3abc\geq\sum_{cyc}ab(a+b)$ (Schur))

Nhưng các bạn thử làm theo Look at the end point xem,sẽ thú vị lắm đấy)

Bài 2: Cho $a>0;a_1;a_2;...;a_n\in[0;a]$

Tìm max $S=\sum_{=1}^{n}(a-a_1)(a-a_2)...(a-a_{k-1}).a_k.(a-a_{k+1})...(a-a_n)$

Bài 3: Cho $a;b;c;d;e\in[p;q]$ với $q>p>0$

Chứng minh:

$(a+b+c+d+e)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e})\leq 25+6[\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}]^2$

Solition of Vophung

Bổ đề:

Cho $x_i\in[a,b].a>0$

$\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\leq\frac{n^2(a+b)^2}{4ab}$

Chứng minh:

Ta có: $(x_i-a)(x_i-b)\leq 0\Leftrightarrow x_i^2-x_i(a+b)+ab\leq 0$

$\Leftrightarrow x_i+\frac{ab}{x_i}\leq a+b$

Cho $i=1,2,...,n$ cộng vế với vế

$n(a+b) \geq \sum_{i=1}^{n} x_i + ab\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} \geq 2\sqrt{ab}\sqrt{(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i})}$

Áp dụng ta có:

=> $(a+b+c+d+e)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}) \leq \frac{5^2(p+q)^2}{4pq}$

Sau đó ta so sánh $(a+b+c+d+e)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}) \leq \frac{5^2(p+q)^2}{4pq}$ với
$25+6(\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}})^2$
<=>$p^2+q^2 \geq 2pq$(đúng)
=> đpcm

Solution of chien than
Giả sử $a \leq b \leq c \leq d \leq e$
Ta có:
$(a+b+c+d+e)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e})$
$=5+\sum_{i<j}(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i})=25+\sum_{i<j}(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-2)$
và tổng lấy theo tất cả $C_5^2=10$cặp chỉ số $1\leq\leq j\leq 5$.Ta lại có:
$(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}})^2=\frac{p}{q}+\frac{q}{p}-2$
Kí hiệu $f(x;y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2$
Ta phải chứng minh:
$(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}})^2=\frac{p}{q}+\frac{q}{p}-2$
Ta sẽ chứng minh với các số dương $x \leq y \leq z$ có BDT $f(x;y)+f(y;z) \leq f(x;z)$,nghĩa là:
$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2 \leq \frac{x}{z}+\frac{z}{x}-2$
Để ý rằng $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}-\frac{x}{z}-1=(\frac{x}{y}-1)(1-\frac{y}{z}) \leq 0$,vì $\frac{x}{y} \leq 1;1 \geq \frac{y}{z}$
Tương tự ta có:
$\frac{z}{y}+\frac{y}{z}-\frac{z}{x}-1 \leq 0$
=>đpcm
Sử dụng các BDT này ta nhận được:
$f(p;a)+f(a;b)+f(b;c)+f(c;d)+f(d;e)+f(e;q) \leq f(p;q)$
$f(p;a)+f(a;c)+f(c;e)+f(e;q) \leq f(p;q)$
$f(p;a)+f(a;d)+f(d;q) \leq f(p;q)$
$f(p;b)+f(a;e)+f(e;q) \leq f(p;q)$
$f(p;b)+f(b;d)+f(d;q) \leq f(p;q)$
$f(p;a)+f(a;e)+f(e;q) \leq f(p;q)$
Cộng các BDt này lại ta có đpcm

Bài 4: **Bài 4**: $Cho a;b;c>0$.Chứng minh:
$|\frac{a}{b-c}|+|\frac{b}{c-a}|+|\frac{c}{a-b}|\geq 2$

Bài 5:
Cho $x_i\in[0;1]$.Chứng minh:
$x_1+x_2+...+x_n+x_1x_2+x_2x_3-...-x_nx_1\leq[\frac{n}{2}]$

Bài 6:(Tổng quát ví dụ 6)
Cho $a_1;a_2;...;a_n\geq 0$.Chứng minh:
$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\leq max_{1\leq i\leq j\leq n}\{(\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j})^2\}$

Bài 7:
Cho $a;b;c;d\in[0;1]$.Chứng minh rằng:
$a+b+c+d-abcd\leq 3$

Bài 8:
Cho $x_1;x_2;..;x_n\in[0;1]$.Chứng minh:
$x_1+x_2+...+x_n-x_1x_2...x_n\leq n-1$

Bài 9
Cho $x;y;z>0;x+y+z=1$.Chứng minh:
$9xyz+1\geq 4(xy+yz+xz)$

Bài 10:
Cho $x;y;z>0;x+y+z=1$.Chứng minh rằng:
$5(x^2+y^2+z^2)\leq 6(x^3+y^3+z^3)+1$

Bài 11(Tổng quát ví dụ 9)
Cho $n\in N;n\geq 2$và $a_1;a_2;...;a_n\in[0;1]$
Chứng minh:
$\sum_{cyc}\frac{a_1}{S-a_1+1}+(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)\leq 1$
trong đó $S=a_1+a_2+...+a_n$

Bài 12:
Đây là 1 bài toán rất hay có nhiều cách giải:
Cho $x;y;z>0;x+y+z=1$.Chứng minh rằng:
$\frac{1}{1-xy}+\frac{1}{1-yz}+\frac{1}{1-xz}\leq\frac{27}{8}$

Bài viết xin được dừng ở đây,rất mong ý kiến đóng góp của tất cả các bạn!
Mọi ý kiến xin gửi về địa chỉ vu_minhthang@yahoo.com
Xin Chân thành cảm ơn!

Tài liệu tham khảo:
1/Bất đẳng thức,Suy luận và Khám phá-Phạm Văn Thuận,Lê Vĩ
2/Vô địch 19 nước
3/Các phương pháp chứng minh bất đẳng thức-Trần Tuấn Anh
4/Tạp chí TTT2,NXBGD