Mục lục

Chương 1

Đề thi chọn đội tuyển toán

1.1 Đề thi chọn đội tuyển toán năm học 1989 - 1990 (Ngày thi: 16, 17/5/1990)

Bài 1: Trong mặt phẳng cho đa giác lồi $M_0, M_1, \ldots, M_{2n}$ $(n \geqslant 1)$ mà $2n+1$ đỉnh $M_0, M_1, \ldots, M_{2n}$ nằm (theo thứ tự ngược chiều quay của kim đồng hồ) trên một đường tròn (C) bán kính R. Giả sử có điểm A bên trong đa giác lồi đó sao cho các góc $\widehat{M_0AM_1}, \widehat{M_1AM_2}, \ldots, \widehat{M_{2n-1}AM_{2n}}, \widehat{M_{2n}AM_0}$ đều bằng nhau, (và bằng $\frac{360}{2n+1}$ độ). Giả sử A không trùng với tâm của (C) và gọi B là điểm nằm trên đường tròn (O) sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường kính đi qua A.

Chứng minh:

$$\frac{2n+1}{\frac{1}{AM_0} + \frac{1}{AM_1} + \cdots + \frac{1}{AM_{2n}}} < AB < \frac{AM_0 + AM_1 + \cdots + AM_{2n}}{2n+1} < R$$

Bài 2: Cho bốn số thực dương a, b, A, B. Xét dãy số thực $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ xác định bởi:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b$$
$$x_{n+1} = A\sqrt[3]{x_n^2} + B\sqrt[3]{x_{n-1}^2} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

Chứng minh rằng tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} x_n$ và hãy tính giới hạn ấy.

Bài 3: Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f(x)$ xác định với mọi số thực x và thoả mãn $f(f(x)) = x^2 - 2$ với mọi x.

Bài 4: Xét tập hợp T gồm hữu hạn số nguyên dương thoả mãn hai điều kiện:

1. Với hai phần tử bất kỳ của T thì ước số chung lớn nhất và bội số chung nhỏ nhất của chúng cũng là những phần tử của T.

2. Với mỗi phần tử x của T, có phần tử x' của T sao cho x và x' nguyên tố cùng nhau và bội số chung nhỏ nhất của chúng là số lớn nhất của T.

Với mỗi tập hợp T như thế, ký hiệu $l(T)$ là số phần tử của nó. Tìm số $l(T)$ lớn nhất, biết rằng $l(T)$ nhỏ hơn 1990.

Bài 5: Cho tứ diện mà mỗi cặp cạnh đối diện đều có tích độ dài bằng l. Gọi các góc giữa các cạnh đối diện đó là α, β, γ và gọi các bán kính của các đường tròn ngoại tiếp các mặt của tứ diện là R_1, R_2, R_3, R_4. Chứng minh:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \geqslant \frac{l}{\sqrt{R_1R_2R_3R_4}}$$

Bài 6: Có n em học sinh ($n \geqslant 3$) đứng thành một vòng tròn và luôn quay mặt vào cô giáo ở tâm vòng tròn. Mỗi lần cô giáo thổi còi thì có hai em nào đó đứng sát cạnh nhau đổi chỗ cho nhau, còn các em khác không dời chỗ. Tìm số M bé nhất để sau M lần thổi còi, bằng các đổi chỗ như nói ở trên một cách thích hợp, các học sinh đứng được thành vòng tròn sao cho: Hai em bất kỳ lúc ban đầu đứng sát cạnh nhau thì lúc kết thúc cũng đứng sát cạnh nhau, nhưng trong hai em đó, tạm gọi là A và B, nếu A lúc ban đầu đứng bên tay trái của B thì lúc kết thúc A đứng bên tay phải của B.

1.2 Đề thi chọn đội tuyển toán năm học 1990 - 1991 (Ngày thi 8, 9/5/1991)

Bài 1: Trong mặt phẳng xét tập hợp S gồm n điểm phân biệt ($n \geqslant 3$) thoả mãn ba điều kiện sau:

1. Khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ thuộc S đều không vượt quá 1 đơn vị dài.

2. Mỗi điểm A thuộc S có đúng hai điểm "kề với nó", nghĩa là hai điểm thuộc S có cùng khoảng cách bằng 1 đến điểm A.

3. Với hai điểm tuỳ ý A, B thuộc S gọi A' và A'' là hai điểm kề với A, gọi B' và B'' là hai điểm kề với B thì $\widehat{A'AA''} = \widehat{B'BB''}$.

Hỏi có tồn tại tập hợp S như thế khi $n = 1991$ không và khi $n = 2000$ không? Vì sao?

Bài 2: Cho dãy số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ với n lớn hơn 2 và a_1 khác a_n, là dãy không giảm (nghĩa là $a_k \leqslant a_{k+1}$ với $k = 1, 2, \dots, n-1$) hoặc là dãy không tăng (nghĩa là $a_k \geqslant a_{k+1}$ với $k = 1, 2, \dots, n-1$), và cho các số thực dương x, y thoả mãn $\frac{x}{y} \geqslant \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_n}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{a_2x + a_3y} + \dots + \frac{a_k}{a_{k+1}x + a_{k+2}y} + \dots + \\ \dots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}x + a_ny} + \frac{a_{n-1}}{a_nx + a_1y} + \frac{a_n}{a_1x + a_2y} \geqslant \frac{n}{x+y}$$

Bài 3: Cho dãy số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ xác định bởi:

$$x_1 = 1, x_2 = 9, x_3 = 9, x_4 = 1$$
$$x_{n+4} = \sqrt[4]{x_nx_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}} \quad \text{với} \quad n \geqslant 1$$

Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn. Tìm giới hạn đó.

Bài 4: Gọi T là hình tứ diện tuỳ ý thoả mãn hai điều kiện sau:

1. Mỗi cạnh có độ dài không vượt quá 1 đơn vị dài.
2. Mỗi mặt là một tam giác vuông.

Ký hiệu $s(T)$ là tổng bình phương diện tích bốn mặt của hình tứ diện T. Tìm giá trị lớn nhất của $s(T)$.

Bài 5: Với mỗi số tự nhiên n, định nghĩa số $f(n)$ như sau: $f(1) = 1$ và khi $n > 1$ thì $f(n) = 1 + a_1p_1 + \dots + a_kp_k$, trong đó $n = p_1 \dots p_k$ là sự phân tích thành thừa số nguyên tố của n (các số nguyên tố $p_1, \dots, p_k$ đôi một khác nhau và $a_1, \dots, a_k$ là số nguyên dương). Với mỗi số tự nhiên s, đặt $f_s(n) = f(f(\dots(f(n))\dots))$, trong đó ở vế phải có đúng s lần chữ f.

Chứng minh rằng với số tự nhiên a cho trước, có số tự nhiên s_0 để với mọi số nguyên $s > s_0$ thì tổng $f_s(a) + f_{s-1}(a)$ không phụ thuộc vào s.

Bài 6: Cho tập hợp X gồm $2n$ số thực đôi một khác nhau ($n \geqslant 3$). Xét một tập hợp K gồm một số cặp số thực (x, y) với x, y thuộc X, x khác y, mà K thoả mãn hai điều kiện sau:

1. Nếu cặp số (x, y) thuộc K thì cặp số (y, x) không thuộc K.
2. Mỗi số x thuộc X có mặt nhiều nhất trong 19 cặp số của K.

Chứng minh rằng ta có thể phân chia tập hợp X thành 5 tập hợp con không rỗng và đôi một không giao nhau x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sao cho với mỗi $i = 1, 2, 3, 4, 5$ thì số cặp số (x, y) thuộc K mà x và y cùng thuộc X_i không vượt quá $3n$.

1.3 Đề thi chọn đội tuyển năm học 1991 - 1992 (Ngày thi 19, 20/05/1992)

Bài 1: Cho hai số tự nhiên n và m $(n > 1)$. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất sau: Trong k số nguyên tuỳ ý $a_1, a_2, \ldots, s_k$ mà $a_i - a_j$ $(i \neq j$ và i, j chạy từ 1 đến $k)$ không chia hết cho n, luôn tồn tại hai số $a_p, a_s \quad (p \neq s)$ thoả mãn $m + a_p - a_s$ chia hết cho n.

Bài 2: Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực và có bậc lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng với mỗi số $c > 0$, tồn tại số nguyên dương n_0 thoả mãn điều kiện sau: Nếu đa thức $P(x)$ với hệ số thực có bậc lớn hơn hoặc bằng n_0, và có hệ số của số hạng bậc cao nhất bằng 1 thì các số nguyên x mà $|f(P(x))| \leqslant c$ không vượt quá bậc của $P(x)$.

Bài 3: Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c \quad (a \neq b \neq c)$. Trong mặt phẳng ABC lấy các điểm A', B', C' sao cho:

1. Các cặp điểm A và A', B và B', C và C' hoặc đều ở cùng phía hoặc đều ở khác phía theo thứ tự đối với các đường thẳng BC, CA, AB.

2. Các tam giác $A'BC, B'CA, C'AB$ là các tam giác cân đồng dạng.

Hãy xác định các góc $\widehat{A'BC}$ theo a, b, c để các độ dài AA', BB', CC' không phải là ba độ dài của ba cạnh một tam giác.

(Tam giác được hiểu theo nghĩa thông thường: ba đỉnh của nó không thẳng hàng).

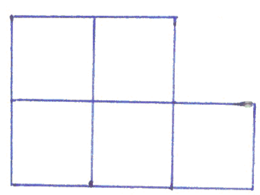
Bài 4: Trong mặt phẳng cho một họ hữu hạn hình tròn thoả mãn: hai hình tròn bất kỳ hoặc ở ngoài nhau hoặc tiếp xúc ngoài với nhau và mỗi hình tròn không tiếp xúc với quá 6 hình tròn khác. Giả sử mỗi hình tròn không tiếp xúc với 6 hình tròn khác đã được đặt ứng với một số thực nào đó. Chứng minh rằng không có quá một cách đặt ứng với mỗi hình tròn còn lại một số thực bằng trung bình cộng của 6 số ứng với 6 hình tròn tiếp xúc nó.

Bài 5: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thoả mãn phương trình
$$x^2 + y^2 - 5xy + 5 = 0$$
.

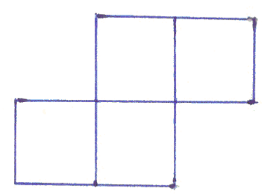
Bài 6: Trong một hội thảo khoa học tất cả các đại biểu tham dự biết tổng cộng $2n$ ngôn ngữ $n \geqslant 2$. Mỗi người biết đúng 2 ngôn ngữ và bất cứ hai người nào cũng biết chung nhiều nhất một ngôn ngữ. Biết rằng với một số nguyên k thoả mãn $1 \leqslant k \leqslant n-1$ đều có không quá $k-1$ ngôn ngữ mà mỗi ngôn ngữ này có không quá k người biết. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra một nhóm $2n$ đại biểu biết tổng cộng $2n$ ngôn ngữ và mỗi ngôn ngữ có đúng 2 đại biểu trong nhóm biết.

1.4 Đề thi chọn đội tuyển toán năm học 1992 - 1993 (Ngày 4, 5/05/1993)

Bài 1: Gọi hình chữ nhật kích thước 2×3 (hoặc 3×2) bị cắt bỏ một hình vuông 1×1 ở một góc là hình chữ nhật khuyết đơn (xem hình 1). Gọi hình chữ nhật kích thước 2×3 (hoặc 3×2) bị cắt bỏ hai hình vuông 1×1 ở hai góc đối diện là hình chữ nhật khuyết kép (xem hình 2). Người ta ghép một số hình vuông 2×2, một số hình chữ nhật khuyết đơn và một số hình chữ nhật khuyết kép với nhau sao cho không có hai hình nào chờm lên nhau, để tạo thành một hình chữ nhật kích thước 1993×2000. Gọi s là tổng số các hình vuông 2×2 và hình chữ nhật khuyết kép cần dùng trong mỗi cách ghép hình nói trên. Tìm giá trị lớn nhất của s.



HÌNH 1



HÌNH 2

Bài 2: Cho dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi:

$$a_1 = 1 \quad \text{và} \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{a_n}} \quad \text{với} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Hãy tìm tất cả các số thực α sao cho dãy $\{u_n\}$ xác định bởi $u_n = \frac{a_n^\alpha}{n}$ với $n = 1, 2, 3, \ldots$ có giới hạn hữu hạn khác 0 khi $n \to +\infty$.

Bài 3: Xét các số thực x_1, x_2, x_3, x_4 thoả mãn:

$$\frac{1}{2} \leqslant x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leqslant 1$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 2x_3 + x_4)^2 + (x_2 - 2x_1)^2 + (x_3 - 2x_4)^2$$

Bài 4: Gọi H, I, O theo thứ tự là trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp của một tam giác. Chứng minh rằng $2.IO \geqslant IH$. Hỏi dấu bằng xảy ra khi nào?

Bài 5: Cho số nguyên $k > 1$. Với mỗi số nguyên $n > 1$, đặt

$$f(n) = k.n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \ldots (1 - \frac{1}{p_r})$$

trong đó $p_1, p_2, \ldots, p_r$ là tất cả các ước số nguyên tố phân biệt của n. Tìm tất cả các giá trị k để dãy $\{x_m\}$ xác định bởi $x_0 = a$ và $x_{m+1} = f(x_m), m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ là dãy bị chặn với mọi số nguyên $a > 1$.

Bài 6: Xét n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n \quad (n > 2)$ trong không gian, trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Mỗi cặp điểm $A_i, A_j (i \neq j)$ được nối với nhau bởi một đoạn thẳng.

Tìm giá trị lớn nhất của n sao cho có thể tô tất cả các đoạn thẳng đó bằng hai màu xanh, đỏ thoả mãn ba điều kiện sau:

1. Mỗi đoạn thẳng được tô bằng đúng một màu.

2. Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, n$ số đoạn thẳng có một đầu mút là A_i mà được tô màu xanh không vượt quá 4.

3. Với mỗi đoạn thẳng A_i, A_j được tô màu đỏ đều tìm thấy ít nhất một điểm A_k (k khác i, j) mà các đoạn thẳng A_kA_i và A_kA_j đều được tô màu xanh.

1.5 Đề thi chọn đội tuyển toán năm học 1993 - 1994 (Ngày 18, 19/05/1994)

Bài 1: Given a parallelogram $ABCD$. Let E be a point on the side BC and F be a point on the side CD such that the triangles ABE and BCF have the same are. The diagonal BD intersects AE at M and intersects AF at N. Prove that.

a) There exists a triangle, three sides of which are equal to BM, MN, ND.

b) When E, F vary such that the length sides of MN decreases, the radius of the circumcircle of the abovementioned triangle also decreases.

Bài 2: Consider the equation

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - Nxyzt - N = 0$$

where N is a given positive integer.

a) Prove that for an infinite number of values of N, this equation has positive integral solution (each such solution consists of four positive integers x, y, x, t).

b) Let $N = 4^k(8m+7)$ where k, m are non-negative integers. Prove that the considered equation has no positive integral solution.

Bài 3: Let be given a polynomial $P(x)$ of degree 4, having 4 positive roots. Prove that the equation

$$\frac{1-4x}{x^2}P(x) + (1 - \frac{1-4x}{x^2})P'(x) - P''(x) = 0$$

has also 4 positive roots.

Bài 4: Given an equilateral triangle ABC and a point M in the plan (ABC). Let A', B', C' be respectively the symmetric through M of A, B, C.

a) Prove that there exists s unique point P equidistant from A and B', from B and C' and from C and A'.

b) Let D be the midpoint of the side AB. When M varies (M does not coincide with D), prove that the circumcircle of triangle MNP (N is the intersection of the lines DM and AP) passes through a fixed point.

Bài 5: Determine all function $f : R \to R$ satisfying

$$f(\sqrt{2}x) + f((4+3\sqrt{2})x) = af((2+\sqrt{2})x)$$

for all x.

Bài 6: Calculate

$$T = \frac{1}{n_1!n_2!\dots n_{1994}!(n_2 + 2n_3 + 3n_4 + \cdots 1993n_{1994})!}$$

where the sum is taken over all 1994-upple of natural numbers $(n_1, n_2, \dots, n_{1994})$ satisfying

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + 1994n_{1994} = 1994$$

1.6 Đề thi chọn đội tuyển toán năm học 1994 - 1995 (Ngày 5, 6/5/1995)

Bài 1. Cho tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$. Lấy sáu điểm phân biệt $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ không trùng với A, B, C sao cho các điểm A_1, A_2 nằm trên đường thẳng BC; các điểm B_1, B_2 nằm trên đường thẳng CA; các điểm C_1, C_2 nằm trên đường thẳng AB. Gọi α, β, γ là các số thực xác định bởi

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{\alpha}{a}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{B_1B_2} = \frac{\beta}{b}\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{C_1C_2} = \frac{\gamma}{c}\overrightarrow{AB}.$$

Xét các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1,AB_2C_2, BC_1A_1, BC_2A_2, CA_1B_1, CA_2B_2 và gọi d_A, d_B, d_C theo thứ tự là các trục đẳng phương của cặp đường tròn đi qua A, cặp đường tròn đi qua B, cặp đường tròn đi qua C. Chứng minh rằng d_A, d_B, d_C đồng quy khi và chỉ khi

$$a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0.$$

Bài 2. Tìm tất cả các số nguyên k sao cho có vô số giá trị nguyên $n \geq 3$ để đa thức

$$P_n(x) = x^{n+1} + kx^n - 870x^2 + 1945x + 1995$$

có thể phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hay bằng 1.

Bài 3. Tìm tất cả các số nguyên a, b, n lớn hơn 1 thoả mãn điều kiện

$$(a^3 + b^3)^n = 4(ab)^{1995}.$$

Bài 4. Trong không gian cho n điểm ($n \geq 2$) mà không có bốn điểm nào đồng phẳng và cho $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)$ đoạn thẳng mà tất cả các đầu mút của chúng nằm trong số n điểm đã cho. Biết rằng có ít nhất một đoạn thẳng mà sau khi bỏ nó đi (giữ nguyên các đầu mút) thì sẽ tồn tại hai điểm phân biệt mà không phải là hai đầu mút của một đường gấp khúc nào.

Hãy tìm số k lớn nhất sau cho có k đoạn thẳng tạo thành đường gấp khúc khép kín mà mỗi đỉnh của nó là mút của đúng hai đoạn thẳng thuộc đường gấp khúc đó.

Bài 5. Với mỗi số nguyên không âm n đặt $f(n)$ là số nguyên không âm lớn nhất sao cho $2^{f(n)}$ là một ước số của $n + 1$. Cặp số nguyên không âm (n, p) được gọi là đẹp nếu $2^{f(n)} > p$. Hãy tìm tất cả các bộ ba số nguyên không âm (n, p, q) sao cho các cặp số $(n, p), (p, q)$, và $(n + p + q, n)$ đều là các cặp số đẹp.

Bài 6. Cho hàm số thực

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3}{3(x^2 - 1)}.$$

1. Chứng minh rằng tồn tại hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồng thời các tính chất sau

$$f(g(x)) = x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}; \ \ g(x) > x \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Chứng minh rằng tồn tại số thực $a > 1$ để dãy $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, ...$, được xác định bởi $a_0 = a, \ a_{n+1} = f(a_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$ là dãy tuần hoàn với chu kỳ dương nhỏ nhất bằng 1995.

1.7 Đề thi chọn đội tuyển toán năm học 1995 - 1996 (Ngày 17, 18/5/1996)

Bài 1. Trong mặt phẳng cho $3n$ điểm ($n > 1$) mà không có ba điểm nào thẳng hàng và khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ không vượt quá 1. Chứng minh rằng có thể dựng được n tam giác đôi một rời nhau và thoả mãn đồng thời các điều kiện sau

1. Mỗi điểm trong $3n$ điểm đã cho là đỉnh của đúng một tam giác;

2. Tổng diện tích của n tam giác nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.

   Hai tam giác được gọi là rời nhau nếu chúng không có điểm nào chung nằm bên trong cũng như nằm trên cạnh tam giác.

Bài 2. Với mỗi số nguyên dương n, gọi $f(n)$ là số nguyên lớn nhất để số

$$\sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{2i+1}{n} 3^i \text{ chia hết cho } 2^{f(n)}.$$

Tìm tất cả các số nguyên dương n mà $f(n) = 1996$.

Bài 3. Xét các số thực a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(a,b,c) = (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \tfrac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4).$$

Bài 4. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Với mỗi điểm M của mặt phẳng (ABC) gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua đường thẳng AB, gọi M_2 là điểm đối xứng của M_1 qua đường thẳng BC và gọi M' là điểm đối xứng của M_2 qua đường thẳng CA. Hãy xác định tất cả các điểm M của mặt phẳng (ABC) mà khoảng cách MM' bé nhất. Gọi khoảng cách đó là d. Chứng minh rằng với mỗi điểm M của mặt phẳng (ABC) khi ta thực hiện liên tiếp ba phép đối xứng qua ba đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác ABC theo thứ tự khác (so với thứ tự trên) để được điểm M'' thì khoảng cách bé nhất của MM'' cũng bằng d.

Bài 5. Người ta muốn mời một số em học sinh tới dự một buổi gặp mặt, mà trong số đó mỗi em chưa quen với ít nhất là 56 em khác, và với mỗi cặp hai em chưa quen nhau thì đều có ít nhất một em quen với cả hai em đó. Hỏi số học sinh được mời dự buổi gặp mặt nói trên có thể là 65 em hay không?

Bài 6. Hãy tìm tất cả các số thực a sao cho dãy số $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, ...$, xác định bởi

$$x_0 = \sqrt{1996}, \quad x_{n+1} = \frac{a}{1 + x_n^2} \quad \text{với } n = 0, 1, 2, , ...$$

có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$.

1.8 Đề thi chọn đội tuyển toán năm học 1996 - 1997 (Ngày 16, 17/5/1997)

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$ với $BC = a, CA = b, AB = c, DA = a_1, DB = b_1, DC = c_1$. Chứng minh rằng có điểm P duy nhất thoả mãn

$$PA^2 + a_1^2 + b^2 + c^2 = PB^2 + b_1^2 + c^2 + a^2 = PC^2 + c_1^2 + a^2 + b^2 = PD^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$$

và với điểm P đó ta luôn có $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 \geq 4R^2$, trong đó R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tìm điều kiện cần và đủ với độ dài các cạnh của tứ diện để bất đẳng thức trên trở thành đẳng thức.

Bài 2. Ở một nước có 25 thành phố. Hãy xác định số k bé nhất sao cho có thể thiết lập các đường bay (dùng cho cả đi lẫn về) giữa các thành phố để hai điều kiện sau được đồng thời thoả mãn

1. Từ mỗi thành phố có đường bay trực tiếp đến đúng k thành phố khác;
2. Nếu giữa hai thành phố không có đường bay trực tiếp thì tồn tại ít nhất một thành phố có đường bay trực tiếp đến hai thành phố đó.

Bài 3. Hãy tìm số thực α lớn nhất sao cho tồn tại vô hạn số tự nhiên (a_n), $n = 1, 2, 3, ...$, thoả mãn đồng thời các điều kiện sau

1. $a_n > 1997^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;
2. với mỗi $n \geq 2$ đều có $u_n \geq a_n^\alpha$, trong đó u_n là ước số chung lớn nhất của họ tất cả các số $a_i + a_k$ mà $i + k = n$.

Bài 4. Cho hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ thoả mãn các điều kiện $f(0) = 2,\ f(1) = 503$ và $f(n + 2) = 503f(n + 1) - 1996f(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Với mỗi số $k \in \mathbb{N}^*$ lấy số nguyên $s_1, s_2, ..., s_k$ sao cho $s_i \geq k$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$. Với mỗi số s_i $(i = 1, 2, ..., k)$ lấy một ước nguyên tố $p(s_i)$ nào đó của $f(2^{s_i})$. Chứng minh rằng với số nguyên dương $t \leq k$, ta có

$$\sum_{i=1}^{k} p(s_i) \vdots 2^t \text{ khi và chỉ khi } k \vdots 2^t.$$

Bài 5. Hãy xác định tất cả các cặp số thực a, b sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và với mọi nghiệm thực x_n của phương trình

$$4n^2x = \log_2(2n^2x + 1)$$

ta luôn có

$$a^{x_n} + b^{x_n} \geq 2 + 3x_n.$$

Bài 6. Cho các số nguyên dương n, k, p với $k \geq 2$ và $k(p+1) \leq n$. Cho n điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn. Tô tất cả n điểm đó bởi hai màu xanh, đỏ (mỗi điểm tô bởi một màu) sao cho có đúng k điểm được tô bởi màu xanh và trên mỗi cung tròn mà hai đầu mút là hai điểm màu xanh liên tiếp (tính theo chiều quay của kim đồng hồ) đều có ít nhất p điểm được tô bởi màu đỏ.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu khác nhau?

(Hai cách tô màu được gọi là khác nhau nếu có ít nhất một điểm được tô bởi hai màu khác nhau trong hai cách đó).

1.9 Đề thi chọn đội tuyển toán năm học 1997 - 1998 (Ngày 13, 14/5/1998)

Bài 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ sao cho với mọi số thực dương c tồn tại đa thức hệ số thực $P_c(x)$ thoả mãn

$$|f(x) - P_c(x)| \leq cx^{1998} \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f(x)$ là một đa thức với hệ số thực.

Bài 2. Trong mặt phẳng cho đường tròn (C) bán kính R chứa và tiếp xúc với đường tròn (C') bán kính $\frac{R}{2}$. Xét họ H các đường trong bên trong (C), bên ngoài (C'), tiếp xúc với (C) và (C'). Với mỗi số nguyên $n \geq 3$ và các số dương p_1, p_n, chứng minh rằng hệ thức

$$(p_1 - p_n)^2 = (n-1)^2(2(p_1 + p_n) - (n-1)^2 - 8)$$

là điều kiện cần và đủ để có n đường tròn phân biệt $(C_1), (C_2), ..., (C_n)$ của họ H mà (C_i) tiếp xúc ngoài với (C_{i-1}) và (C_{i+1}) $(i = 2, 3, ..., n-1)$, ở đó (C_1) có bán kính $\frac{R}{p_1}$, (C_n) có bánh kính $\frac{R}{p_n}$.

Bài 3. Cho các số nguyên dương $m > 3$. Giả sử $p_1, p_2, ..., p_k$ là tất cả các số nguyên tố không vượt quá m. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2}\right) > \ln(\ln m).$$

Bài 4. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số nguyên với hệ số bậc cao nhất bằng 1, có tính chất: Tồn tại vô số các số vô tỉ α để $P(\alpha)$ đều là số nguyên dương.

Bài 5. Giả sử d là ước dương của $5 + 1998^{1998}$. Chứng minh rằng d có thể biểu diễn dưới dạng $d = 2x^2 + 2xy + 3y^2$, ở đó x, y là các số nguyên khi và chỉ khi d chia cho 20 có dư 3 hoặc 7.

Bài 6. Trong một cuộc hội thảo có n, $n \geq 10$ người tham dự. Biết rằng

1. Mỗi người quen với ít nhất $\left[\frac{n+2}{3}\right]$ người tham dự.

2. Hai người bất kỳ A và B nếu không quen nhau thì quen nhau gián tiếp, nghĩa là có k $(k \geq 1)$ người $A_1, A_2, ..., A_k$ sao cho A quen A_1, A_i quen A_{i+1}, $(i = 1, 2, ..., k-1)$ và A_k quen B.

3. Không thể xếp n người thành một hàng ngang sao cho hai người cạnh nhau bất kỳ đều quen nhau.

Chứng minh rằng có thể chia n người thành hai nhóm: nhóm thứ nhất xếp được quanh một bàn tròn sao cho hai người cạnh nhau bất kỳ đều quen nhau, còn nhóm thứ hai gồm người đôi một không quen nhau.

1.10 Đề thi chọn đội tuyển năm học 2001 - 2002 (Ngày thi 7, 8/5/2002)

Bài 1. Tìm tất cả các tam giác ABC có $\widehat{BCA}$ là góc nhọn và đường trung trực của đoạn thẳng BC cắt các tia Ax và Ay, là các tia chia góc $\widehat{BAC}$ thành ba phần bằng nhau ($\widehat{BAx} = \widehat{xAy} = \widehat{yAC}$) tại các điểm M và N thoả mãn:

$$AB = NP = 2HM$$

trong đó: H là hình chiếu vuông góc của A trên BC và M là trung điểm của đoạn thẳng BC.

Bài 2. Người ta ghi lên bảng số nguyên dương N_0. Hai người A và B chơi trò chơi trò chơi sau: Người A xoá số N_0 rồi ghi lên bảng số $N_1 \in \{N_0 - 1; [N_0/3]\}$. Tiếp theo người B xoá số N_1 rồi ghi lên bảng số $N_2 \in \{N_1 - 1; [N_1/3]\}$. Đến lượt mình người A lại thực hiện phép toán trên đối với N_2;...Trò chơi cứ tiếp tục cho đến khi trên bảng xuất hiện số 0. Người ghi số 0 đầu tiên được coi là thắng cuộc, người còn lại bị coi là thua cuộc. Hỏi ai, người A hay người B, là người có cách chơi để chắc chắn thắng nếu:

1) $N_0 = 120$

2) $N_0 = (3^{2002} - 1)/2$

3) $N_0 = (3^{2002} + 1)/2$

Bài 3. Cho số nguyên dương m có một ước nguyên tố lớn hơn $\sqrt{2m}+1$. Hãy tìm số nguyên dương M nhỏ nhất sao cho tồn tại một tập hợp gồm hữu hạn số nguyên dương đôi một khác nhau thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) m và M tương ứng là số nhỏ nhất và số lớn nhất trong T.

ii) Tích tất cả các số thuộc T là một số chính phương.

Bài 4. Cho số nguyên dương $n \geq 2$ và cho bảng ô vuông kích thước $n \times 2n$ (bảng gồm n hàng và $2n$ cột). Người ta đánh dấu một cách ngẫu nhiên n^2 ô vuông con của bảng. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên k mà $1 < k \leq [n/2] + 1$, luôn tồn tại k hàng sao cho bảng ô vuông kích thước $k \times 2n$, được tạo nên từ k hàng đó, có không ít hơn

$$\frac{k!(n-2k+2)}{(n-k+1)(n-k+2)\dots(n-1)}$$

cột chỉ gồm các ô được đánh dấu.

([a] ký hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá a).

Bài 5. Hãy tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên sao cho đa thức

$$Q(x) = (x^2 + 6x + 10)[P(x)]^2 - 1$$

là bình phương của một đa thức với hệ số nguyên.

Bài 6. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên $m \geq 2002$ và m số nguyên dương đôi một khác nhau $a_1, a_2, \dots, a_m$ sao cho số

$$\prod_{i=1}^{m} a_i^2 - 4\sum_{i=1}^{m} a_i^2$$

là số chính phương.

1.11 Đề thi chọn đội tuyển toán năm học 2003 - 2004 (Ngày 7, 8/5/2004)

Bài 1. Xét tập hợp S gồm 2004 số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, \dots, a_2004$, có tính chất: Nếu với mỗi $i = 1, 1, \dots, 2004$, ký hiệu $f(a_i)$ là số các số thực thuộc S nguyên tố cùng nhau với a_i thì $d(a_i) < 2003$ và $f(a_i) = f(a_j)$ với mọi $i, j \in \{1, 2, \dots, 2004\}$.

Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho trong mỗi k tập con của một tập S tuỳ ý có tính chất nêu trên đều tồn tại hai số phân biệt mà ước số chung lớn nhất của chúng khác 1.

(k - tập con là tập con có k phần tử).

Bài 2. Hãy xác định tất cả các số thực α mà ứng với mỗi α, có một và chỉ một hàm số f xác định trên tập hợp $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thoả mãn hệ thức.

$$f(x^2 + y + f(y)) = (f(x))^2 + \alpha y$$

với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

($\mathbb{R}$ ký hiệu tập hợp các số thực).

Bài 3. Trong mặt phẳng, cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm A và B. Các tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O_1) cắt nhau tại điểm K. Xét một điểm M (không trùng với A và B) nằm trên đường tròn (O_1). Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng MA và đường tròn (O_2). Gọi C là giao điểm thứ hai của đường thẳng MK và đường tròn (O_1). Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng CA và đường tròn (O_2). Chứng minh rằng:

1) Trung điểm của đoạn thẳng PQ nằm trên đường thẳng MC.

2) Đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên đường tròn (O_1).

((O) ký hiệu đường tròn tâm O).

Bài 4. Cho dãy số $(x_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ xác định bởi

$$x_1 = 603, \quad x_2 = 102 \quad \text{và} \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n + 2\sqrt{x_{n+1}x_n - 2} \quad \text{với mọi} \quad n \geq 1$$

Chứng minh rằng:

1) Tất cả các số hạng của dãy số đã cho đều là các số nguyên dương.

2) Tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho biểu diễn thập phân của x_n có bốn chữ số tận cùng là 2003.

3) Không tồn tại số nguyên dương n mà biểu diễn thập phân của x_n có bốn chữ số tận cùng là 2004.

Bài 5. Xét lục giác lồi $ABCDEF$. Gọi $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Ký hiệu p và p_1 tương ứng là chu vi của lục giác $ABCDEF$ và của lục giác $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Giả sử lục giác $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ có tất cả các góc trong bằng nhau. Chứng minh rằng:

$$p \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} p_1$$

Hỏi dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Bài 6. Cho S là một tập hợp gồm một số số nguyên dương mà số nhỏ nhất và số lớn nhất trong S là hai số nguyên tố cùng nhau.

Với mỗi số tự nhiên n, ký hiệu S_n là tập hợp gồm tất cả các số tự nhiên mà mỗi số đều là tổng của nhiều nhất n số (không nhất thiết đôi một khác nhau) thuộc tập S. Quy ước 0 là tổng của 0 số thuộc S. Gọi a là số lớn nhất trong S. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k và số nguyên b sao cho

$$|S_n| = an + b$$

với mọi $n > k$.

($|X|$ ký hiệu số phần tử của tập hợp X)

Chương 2

Đáp án tuyển sinh

2.1 Đáp án chọn đội tuyển năm học 1991 - 1992

Bài 1. Trong trường hợp m chia hết cho n (kể cả khi $m = 0$ (nếu coi 0 là số tự nhiên, chia hết cho n)), rõ ràng không có số nguyên $k > 1$ thoả mãn đề bài mà $k \leq n$. Vậy $k = n + 1$.

Sau đây xét $m > 0$, m không chia hết cho n, $(n > 1)$.

với $l \in \mathbb{Z}$. Xét

$$\begin{aligned} \varphi(l) : \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}_n \\ \overline{x} &\mapsto l\overline{m} + \overline{x} = \overline{lm + x} \end{aligned}$$

thì nó xác định tác động của nhóm cộng $\mathbb{Z}$ lên $\mathbb{Z}_n$. Nhóm dừng tại $\overline{x}$ gồm các $l \in \mathbb{Z}$ mà $l\overline{m} = \overline{0}$ tức là lm (một bội của m) là bội của n, vậy nhóm dừng đó goòm các bội của $\frac{\text{BSCBN}(m,n)}{m} = \frac{m.n}{d}.\frac{1}{m} = \frac{n}{d} = n_0$, trong đó $d = (m, n)$.

Từ đó mỗi quỹ đạo α của tác động nói trên có n_0 phần tử, cụ thể là dãy $\overline{x_\alpha}$ thuộc α thì $\alpha = \{\varphi(l)(\overline{x_\alpha}) \mid l = 01, ..., n_0 - 1\}$ và $\mathbb{Z}_n$ là hợp rời rạc của $\frac{n}{n_0} = d$ quỹ đạo như thế.

Chú ý: do m không chia hết cho n nên $n_0 > 1$. Vậy số $N = d[\frac{n_0}{2}] + 1 > 1$ và rõ ràng $N \leq n$. Hãy chứng minh N bằng số k cần tìm.

1) $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_N}$ là N phần tử phân biệt của $\mathbb{Z}_n$ thì do có đúng d quỹ đạo rời nhau nên có hơn $[\frac{n_0}{2}]$ phần tử $\overline{a_i}$ đó nằm trong một quỹ đạo α nào đó và do α có n_0 phần tử, có $\overline{a_p}$, $\overline{a_s}$ thuộc α mà $\varphi(1)(\overline{a_p}) = \overline{a_s}$, tức $\overline{m} + \overline{a_p} = \overline{a_s}$ hay $\overline{m + a_p - a_s} = \overline{0}$.

2) Khi $d = 1$ và $n_0 = 2$ hay 3 thì $N = 2$ rõ ràng có tính chất bé nhất cần tìm, tức $N = k$.

Trong các trường hợp khác thì $N > 2$ và lấy trong mỗi quỹ đạo α phần tử $\overline{x_\alpha}$ thì tập hợp $\{\varphi(2l)(\overline{x_\alpha}) \mid l = 0, 1, ..., [\frac{n_0}{2}],\ \alpha$ chạy qua tập các quĩu đạo$\}$

gồm $N-1$ phần tử phân biệt của $\mathbb{Z}_n$ mà không có hai phần tử khác nhau nào có hiệu bằng $\overline{m}$. Vậy N có tính chất bé nhất đang xét.

Kết luận: m chia hết cho n (kể cả $m=0$): $k=n+1$. Còn các trường hợp khác: đặt $d=(m,n)$, $n_0=\frac{n}{d}$ thì $k=d[\frac{n_0}{2}]+1$.

Bài 2. Do $f(x)$ là đa thức có bậc không nhỏ hơn 1 nên $|f(x)|\to+\infty$ khi $|x|\to+\infty$, vậy có $x_0>0$ để $|f(x)|>c$ với mọi x mà $|x|>x_0$. Kí hiệu n_0 là số nguyên dương bé nhất thoả mãn $\frac{n_0!}{2^{n_0}}>x_0$. Hãy chứng minh n_0 là số cần tìm.

Giả sử $p(x)$ là đa thức có $\deg P=k\geq n_0$ và có hệ số của số hạng bậc k bằng 1. Với $k+1$ số nguyên phân biệt tuỳ ý $b_1<b_2<\cdots<b_{k+1}$, theo công thức nội suy Lagrange, ta có

$$P(x)=\sum_{i=1}^{k+1}P(b_i)\prod_{j\neq i}\frac{(x-b_j)}{(b_i-b_j)}.$$

Tính chất hệ số của số hạng bậc cao nhất của $P(x)$ bằng 1 cho

$$\begin{aligned}
1&=\sum_{i=1}^{k+1}P(b_i).\prod_{j\neq i}\frac{1}{b_i-b_j}\\
&\leq\max_{1\leq i\leq k+1}|P(b_i)|.\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{(b_i-b_1)\cdots(b_i-b_{i-1})(b_{i+1}-b_i)\cdots(b_{k+1}-b_i)}\\
&\leq\max_{1\leq i\leq k+1}|P(b_i)|\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{(i-1)!(k+1-i)!}\quad(\text{do } b_j-b_l\geq j-l\ \ \forall j>l)\\
&\leq\max_{1\leq i\leq k+1}|P(b_i)|\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{k!}C_k^j=\frac{2^k}{k!}\Big(\max_{1\leq i\leq k+1}|P(b_i)|\Big)
\end{aligned}$$

Từ đó

$$\max_{1\leq i\leq k+1}|P(b_i)|\geq\frac{k!}{2^k}\geq\frac{n_0!}{2^{n_0}}>x_0$$

.

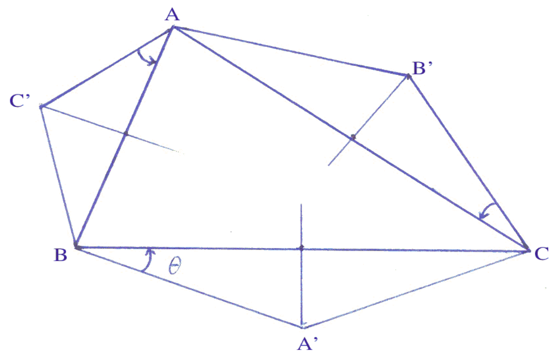
Vậy có $i\in\{1,2,...,k+1\}$ để $|f(P(b_i))|>c$, tức là số các số nguyên x mà $|f(P(x))|\leq c$ không vượt quá $k=\deg P$.

Bài 3. Coi các tam giác cân $A'BC, B'CA, C'AB$ có các đỉnh cân theo thứ tự là A', B', C', (đỉnh cân đối diện với đáy).

Coi tam giác ABC xác định hướng thuận trong mặt phẳng và đặt $\theta=(AC',AB)=(BA',BC)=(CB',CA)$ (góc định hướng), ở đây $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\theta\neq 0$, và A', B', C' theo thứ tự thuộc các trung trực của BC, CA, AB.

1) $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{CA})$, $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})$, trong đó $\overrightarrow{f}$ là tích, phép vị tự

(véctơ) hệ số $\frac{1}{2\cos\theta}$ với phép quay (véctơ) góc $-\theta$. Vậy $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0}$. Chú ý rằng $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}$ là những véctơ khác véctơ không (vì a, b, c khác nhau đôi một) nên suy ra luôn có tam giác có cạnh dài AA', BB', CC' trừ khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'}$ song song với $\overrightarrow{BB'}$.



2) Với hai véctơ $\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{ON}$ trong mặt phẳng đã xác định hương, kí hiệu

$$\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{ON} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{0} \text{ hay } \overrightarrow{ON}=\overrightarrow{0} \\ |\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{ON}|\sin(OM,ON) & \text{nếu } \overrightarrow{OM}\not\overrightarrow{0}, \overrightarrow{ON}\neq\overrightarrow{0} \text{ hay } \\ & \overrightarrow{ON}=\overrightarrow{0} \end{cases}$$

Lấy hệ toạ độ Đềcac vuông góc định hương thuận trong mặt phẳng, $\overrightarrow{OM}(x,y)$, $\overrightarrow{ON}(x',y')$ thì do $\sin(OM,ON) = \sin((Ox,ON)-(Ox,OM))$ tính được $\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{ON} = xy'-x'y$.Từ đó dễ thấy $(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'})\times\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{OM}\times ON + \overrightarrow{OM'}\times\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{OM}\times(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{ON'}) = \overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{CN'}$.

Trở lại bài toán: Dễ thấy từ định nghĩa $\overrightarrow{AA'}$ song song với $\overrightarrow{BB'}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'}\times\overrightarrow{BB'} = 0$.

Ta có

$$\overrightarrow{AA'}\times\overrightarrow{BB'} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'})\times(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB'}) = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CB'}+ \\ +\overrightarrow{BA'}\times\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA'}\times\overrightarrow{CB'}$$

Tính từng số hạng của tổng này: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC} = 2S$, S là diện tích của tam giác ABC; $\overrightarrow{AB}\times CB' = c\frac{b}{2\cos\theta}\sin(\theta-\widehat{A})$, trong đó $\widehat{A} = (AB,AC)$, để ý rằng $(AB,CB') = (AB,AC)+(AC,CA)+(CA,CB') = \widehat{A}+\pi-\theta$; $\overrightarrow{BA'}\times\overrightarrow{BC} = \frac{a}{2\cos\theta}a\sin\theta$; $\overrightarrow{BA'}\times\overrightarrow{CB'} = \frac{a}{2\cos\theta}\frac{b}{2\cos\theta}\sin\widehat{C}$, trong đó $\widehat{C} = (CA,AB)$, để ý rằng $(BA',CB') = (BA',BC)+(BC,CA)+(CA,CB') = \theta+\pi-\widehat{C}-\theta = \pi-\widehat{C}$.

Vậy

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} \times \overrightarrow{BB'} &= 2S + \frac{bc}{2\cos\theta}\sin(\theta - \widehat{A}) + \frac{a^2\sin\theta}{2\cos\theta} + \frac{ab}{4\cos^2\theta}\sin\widehat{C}\\ &= \frac{1}{2}S\tan^2\theta + \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)\tan\theta + \frac{3}{2}S.\end{aligned}$$

Từ đó θ cần tìm là nghiệm của phương trình

$$S\tan^2\theta + \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\tan\theta + 3S = 0.$$

Biệt thức của tam thức bậc hai đối với $\tan\theta$ ở vế trái là

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) - 12S^2\\ &= \frac{1}{2}\{(a^2-b^2)^2 + (b^2-c^2)^2 + (c^2-a^2)^2\} > 0.\end{aligned}$$

(Để ý công thức Heron: $16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4+b^4+c^4)$. Vậy phương trình trên có hai nghiệm $\tan\theta_1$ và $\tan\theta_2$ phân biệt, âm

$$\tan\theta_1, \tan\theta_2 = \frac{1}{4S}\{-(a^2+b^2+c^2) \pm \sqrt{2}\sqrt{(a^2-b^2)^2 + (b^2-c^2)^2 + (c^2-a^2)^2}\},$$

trong đó $S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$.

Coi các tam giác cân $A'BC, B'CA, C'AB$ có đỉnh cân theo thứ tự là B, C, A thì chúng minh theo đúng cách trên ta vẫn có $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$, ở đây $\overrightarrow{f}$ là phép quay (véctơ) góc $-\theta$ (ở đây $0 < \theta < \pi$), còn $\overrightarrow{AA'} \times \overrightarrow{BB'} = 4S - 2S\cos\theta + \frac{a^2+b^2+c^2}{2}\sin\theta$ nên θ cần tìm phải là nghiệm của phương trình lượng giác

$$\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta = \gamma$$

trong đó, $\alpha = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$, $\beta = -2S$, $\gamma = -4S$. Gọi φ là góc mà $\sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ thì $\sin(\theta+\varphi) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = -\frac{8S}{\sqrt{16S^2+(a^2+b^2+c^2)^2}}$, cho hai nghiệm θ_1, θ_2 phân biệt.

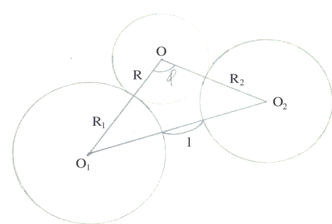
Nếu coi các tam giác cân $A'BC, B'CA, C'AB$ có đỉnh cân theo thự tự là C, A, B thì cũng chứng minh theo cách tương tự, trong kết quả vừa rồi thay θ bởi $\pi - 2\theta$, ở đây $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \theta \neq 0)$.

Bài 4. Kí hiệu $\mathcal{A}$ là tập hợp các hình tròn của họ tiếp xúc 6 hình tròn khác, $\mathcal{B}$ là tập các hình tròn còn lại.

Với mỗi hình tròn C_0 của họ, kí hiệu $\mathcal{L}(C_0)$ là tập giữa C_0 và các hình tròn C của họ mà có dãy $C_1, C_2, ..., C_m$ hình tròn của họ $(m \geq 1)$ để C_i tiếp xúc với C_{i+1} $(i = 0, 1, ..., n-1)$, $C = C_m$.

1) Trong mỗi $\mathcal{L}(C_0)$ phải có $C \in \mathcal{B}$ vì nếu mọi $C \in \mathcal{L}(C_0)$ đều thuộc $\mathcal{A}$ thì xét hình tròn có bán kính bé nhất trong $\mathcal{L}(C_0)$ suy ra mọi hình tròn của (C_0) phải có bán kính bằng bán kính đó (*) và khi đó lưới các tâm các hình tròn của $\mathcal{L}(C_0)$ không thể bị chặn, mâu thuẫn với họ hữu hạn hình tròn.

(*) suy ra từ: một hình tròn bán kính R không thể tiếp xúc ngoài với sáu hình tròn ngoài nhau hay tiếp xúc ngoài nhau mà sáu bán kính không nhỏ hơn R và có bán kính lớn hơn R. Thực vậy, nếu có hình vẽ bên: $O_1O_2 = R_1 + R_2 + l$, $(R \leq R_1,\ R_1 \leq R_2,\ 0 \leq l)$ thì góc $\varphi = (OO_1, OO_2)$ phải giữa $60°$ và $180°$ do



$$\cos\varphi = \frac{(R+R_1)^2 + (R+R_2)^2 - (R_1+R_2+l)^2}{2(R+R_1)(R+R_2)} \leq \frac{1}{2}.$$

2) Nếu có hai cách đặt f, g thỏa mãn đề bài thì $f - g$ lấy giá trị 0 trên $\mathcal{B}$ và nó thỏa mãn điều kiện trung bình cộng của đề bài. Cần chứng minh $f - g$ lấy giá trị 0 trên $\mathcal{A}$. Giả sử có $\widetilde{C} \in \mathcal{A}$ mà $(f-g)(\widetilde{C}) \neq 0$; kí hiệu C_0 là hình tròn của họ sao cho $(f-g)(C_0) = \min\limits_{\text{mọi } C}(f-g)(C)$ nếu $)f-g)(\widetilde{C}) < 0$ hay $(f-g)(C_0) = \max\limits_{\text{mọi } C}(f-g)(C)$ nếu $(f-g)(\widetilde{C}) > 0$, thì $C_0 \in \mathcal{A}$ và theo 1), trong $\mathcal{L}(C_0)$ có dãy $C_1, ..., C_m$ $(m > 1)$, C_i tiếp xúc C_{i+1} $(i = 0, 1, ..., m-1)$, $C_i \in \mathcal{A}$ $(i = 0, 1, ..., m-1)$, $C_m = C \in \mathcal{B}$. Do tính chất trung bình cộng của các số lơn hơn hoặc bằng a (trong các số nhỏ hơn hoặc bằng b) chỉ bằng a (theo thứ tự b) khi tất cả các số đó bằng a (theo thứ tự b) và do tính chất min, max nói trên , với C_0 suy ra $(f-g)(C_0) = (f-g)(C_1) = \cdots = (f-g)(C_{m-1}) = (f-g)(C) = 0$ vì $C \in \mathcal{B}$), do đó có mâu thuẫn.

Chú ý: sau khi xét trường hợp $(f-g)(\widetilde{C}) < 0$ có thể đưa trường hợp $(f-g)(\widetilde{C}) > 0$ về trường hợp nó âm nhờ xét $g - f$ thay cho $f - g$.

Bài 5. Dễ thấy rằng: Nếu (x, y) là nghiệm thì (y, x) là nghiệm. Nếu không có nghiệm nguyên (x, x).

2) Xét ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (x' = 5x - y,\ y' = x)$

a) dễ thấy rằng $x'^2 - 5x'y' + y'^2 = x^2 - 5xy + y^2$.

b) Kí hiệu S là tập các nghiệm nguyên dương thì dễ thấy rằng $f(S) = S$

(để ý rằng phương trình có thể viết $y(5x - y) = x^2 + 5$).

c) Hãy chứng minh rằng với $(x, y) \in \mathbb{S}$ mà $1 < x < y$ thì $f((x, y)) = (x', y')$ có tính chất $1 \leq x/ < x(= y/)$. Thực vậy, khi $1 < x < y = (x', y')$ có tính chất $1 < x < y$ mà x, y nguyên thì $(y - x)^2 + 5 = 3xy \geq 3.2.3$ nên $(y - x)^2 \geq 13$, vậy $y - x \geq 4$. Khi đó nếu như $4x \geq y$ thì $5xy = x^2 + y^2 + 5 \leq x^2 + 4xy + 5$, do đó $x^2 + 5 \geq xy$ hay $x(y - x) \leq 5$, mà $y - x \geq 4$ nên $x = 1$, trái với giả thiết $x > 1$. Vậy $4x < y$, do đó $x' = 5x - y < x$.

d) dễ thấy tập các nghiệm nguyên dạng $(1, y)$ là $S_0\{(1, 3), (1, 2)\}$. vậy từ c) và d) suy ra rằng nếu kí hiệu $S_1 = \{(x, y) \in S \mid 1 < x < y\}$ thì $f(S_1) \subset S_1 \cup S_0$ và với mọi $(x, y) \in S_1$, có số nguyên dương k để $f^k((x, y)) \in S_0$.

3) Đổi vai trò x với y trong 2) suy ra ánh xạ $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : g((x, y)) = (x' = y, y' = 5y - x)$ có tính chất $g(S) \subset S$ và kí hiệu $\widetilde{S_1} = \{(x, y) \in S \mid 1 < y < x\}$, $\widetilde{S_0} = \{(2, 1), (3, 1)\}$ thì $g(\widetilde{S_1}) \subset \widetilde{S_1} \cup \widetilde{S_0}$, $\widetilde{S_0} \subset S$, và với mọi $(x, y) \in \widetilde{S_1}$, có số nguyên dương k để $g^k((x, y)) \in \widetilde{S_0}$.

4) Dễ thấy rằng $g = f^{-1}$, do đó $f\mid_s$, $\quad g\mid_s$ là song ánh và để ý rằng $f(S_0) = \tilde{S}_0$, suy ra $S = \{f^k((1, 3)), f^k((1, 2)) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Chú ý rằng với mọi $k \in \mathbb{Z}$, f^k là song ánh và khi $k \neq 1$ thì f^k không có điểm bất động do nếu $(x, y) \in S$, $f((x, y)) = (x', y')$ thì $x' - y' = 5x - y - x = 4x - y = x - y + 3x > x - y$, vậy các phần tử viết trên đây của S là đôi một khác nhau.

Có thể tính được (với mọi $k \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{cases} f^k((1,3)) = \frac{1}{\alpha}(\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} + 3(\lambda_2^k - \lambda_1^k), \lambda_1^k - \lambda_2^k + 3(\lambda_2^{k-1} - \lambda_1^{k-1})) \\ f^k((1,2)) = \frac{1}{\alpha}(\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} + 2(\lambda_2^k - \lambda_1^k), \lambda_1^k - \lambda_2^k + 2(\lambda_2^{k-1} - \lambda_1^{k-1})) \end{cases}$$

trong đó $\lambda_1 = \frac{1}{2}(5 + \alpha)$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(5 - \alpha)$, $\alpha = \sqrt{21}$. Vài nghiệm

$$\cdots \mapsto (14, 67) \overset{f}{\mapsto} (3, 14) \overset{f}{\mapsto} (1, 3) \overset{f}{\mapsto} (2, 1) \overset{f}{\mapsto} (9, 2) \overset{f}{\mapsto} (43, 9) \overset{f}{\mapsto} \cdots$$

$$\cdots \mapsto (9, 43) \overset{f}{\mapsto} (2, 9) \overset{f}{\mapsto} (1, 2) \overset{f}{\mapsto} (3, 1) \overset{f}{\mapsto} (14, 3) \overset{f}{\mapsto} (67, 14) \overset{f}{\mapsto} \cdots$$

Bài 6. Lập đồ thị G: đỉnh biểu diễn cho "ngôn ngữ", cạnh nối hai đỉnh biểu diễn "người biết hai ngôn ngữ đó". Vậy G là đồ thị $2n$ đỉnh. Điều kiện "hai người biết chung nhiều nhất một ngôn ngữ" nói rằng G là đồ thị đơn. Điều kiện còn lại cho biết: với mỗi k nguyên $1 \leq k \leq n - 1$ có không quá $k - 1$ đỉnh, mỗi đỉnh có bậc nhỏ hơn hoặc bằng k (*).

Theo đề bài, cần chứng minh: từ tất cả các cạnh của G có thể ... $2n$ cạnh thuộc $2n$ đỉnh và mỗi đỉnh luôn thuộc đúng hai cạnh ... $2n$ cạnh đó. Để chứng minh điều này ta sẽ chứng minh:

Trong G tồn tại một đường đi khép kín có độ dài $2n$ và đi qua tất cả các định của G (một đường đi như thế ta sẽ gọi là chu trình H. Ta chứng minh điều này bằng phản chứng. Giả sử trong G không có chu trình H. Khi đó tập các đỉnh không kề nhau của G là không rỗng và hữu hạn. Bằng cách thêm dần hai cạnh nối hai đỉnh không kề nhau ta sẽ xây dựng đồ thị $2n$ đỉnh $\widetilde{G}$ thoả mãn 1) (*), 2) trong $\widetilde{G}$ không có chu trình H 3) Khi thêm cạnh nối hai đỉnh bất kì không kề nhau của $\widetilde{G}$ ta sẽ nhận được đồ thị có chu trình H.

Xét $\widetilde{G}$ với v là đỉnh của $\widetilde{G}$ kí hiệu $f(v)$ là bậc của v.

a) Từ 2) và 3) suy ra giữa hai đỉnh bất kì không kề nhau của $\tilde{G}$ đều tồn tại một đường đi nhận hai đỉnh ấy làm hai đầu mút, đi qua tất cả các đỉnh của $\widetilde{G}$ và có độ dài $2n-1$.

b) Nếu hai đỉnh v và v' của $\widetilde{G}$ có $f(v) \geq n$, $f(v') \geq n$ thì v và v' phải kề nhau.

Thật vậy, giả sử v và v' không kề nhau thì có đường đi $v_1, v_2, ..., v_{2n}$ ($v_1 \equiv v, v_{2n} \equiv v'$ đi qua tất cả các đỉnh của $\widetilde{G}$ và có độ dài $2n-1$. Giả sử $f(v) = s \geq n$. Kí hiệu $v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_s}$ $(2 = i_1 < i_2 < \cdots < i_s < 2n)$ là các đỉnh kề với $v_1 \equiv v$. Khi đó với mỗi $j = 1, 2, ..., s$ các đỉnh $v_{(i_j)-1}$ không kề với $v_{2n} \equiv v'$ vì nếu ngược lại thì chu trình H trong $\widetilde{G}$ là $v_1 v_2 ... v_{(i_j)-1} v_{2n}$ $v_{2n-1} ... v_{i_j}$ mâu thuẫn với 2). Từ đó suy ra $f(v') \leq 2n - (s-1) \leq n-1$ (do $s \geq n$), mâu thuẫn với $f(v') \geq n$. Vậy v, v' phải kề nhau.

c) Từ b) suy ra tập v gồm các đỉnh v của $\widetilde{G}$ mà $f(v) \leq n-1$ là không rỗng, vậy có $\max_{v \in V} f(v) = m \leq n-1$. Lấy v_1 mà $f(v_1) = m$. Điều kiện (*) với $k = n-1$ nói rằng có ít nhất $2n - (n-1) + 1 = n+2$ đỉnh có bậc $\geq n$, do với $k = n-1$ nói rằng có ít nhất một trong các đỉnh này, chẳng hạn v_{2n}, không kề với v_1. Suy ra có đường đi $v_1, v_2, ... v_{2n}$ đi qua tất cả các đỉnh của $\widetilde{G}$ và có độ dài $2n-1$. Kí hiệu $v_{i_1}, v_{i_2}, ... v_{i_m}$ $(2 = i_1 < i_2 < \cdots < i_m < 2n$ là các đỉnh kề với v_1 thì lập luận như ở b) chứng tỏ với mọi $j = 1 \to n$ ta có $v_{(i_j)-1}$ không kề với v_{2n} (chú ý rằng điều kiện (*) với $k = 1$) chứng tỏ mọi đỉnh của $\widetilde{G}$ có bậc ≥ 2. Áp dụng điều kiện (*) với $k = m$ $(2 \leq m \leq n-1)$ suy ra $\{v_{(i_1)-1}, v_{(i_2)-1}, ..., v_{(i_m)-1}\}$ phải có ít nhất một đỉnh v_q có $f(v_q) \geq m+1$. Từ định nghĩa của m suy ra $f(v_q) \geq n$. Như vậy, v_q, v_{2n} có $f(v_q) \geq n$, $f(v_{2n}) \geq n$ mà không kề nhau, mâu thuẫn với b). Mâu thuẫn này cho ta điều phải chứng minh.

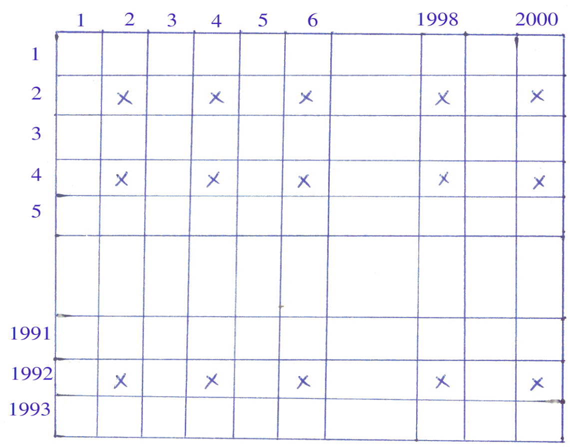
2.2 Đáp án chọn đội tuyển năm học 1992 - 1993

Bài 1. Trường hợp tổng quát khi đặt $1993 = 2m+1$ (dòng) và $2000 = 2n$ (cột) với $m = 996$ và $n = 1000$.

Gọi s là tổng số các hình vuông 2×2 và hình chữ nhật khuyết kép, gọi y

là số các hình chữ nhật khuyết đơn. Ta có đẳng thức về diện tích các hình:

$$4s + 5y = 2n(2m + 1) \tag{1}$$



Đánh dấu $(\times)$ vào các ô vuông có toạ độ $(2r, 2t)$ với $1 \leqslant r \leqslant m$ và $1 \leqslant t \leqslant n$ ta được $m.n$ dấu $(\times)$. Dễ thấy trên hình:

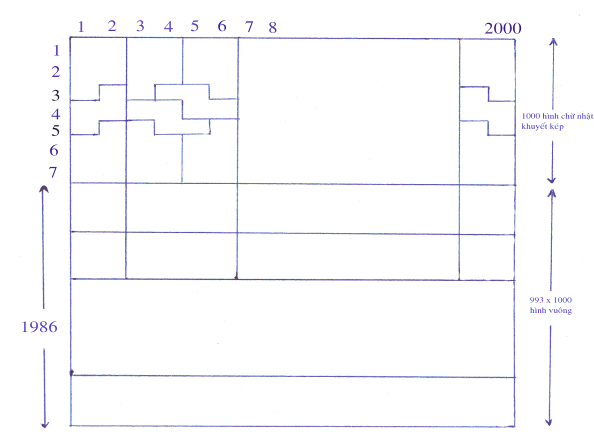
+) Hình vuông 2×2 hoặc hình chữ nhật khuyết kép chứa đúng một dấu $(\times)$.

+) Hình chữ nhật khuyết đơn chứa một hoặc hai dấu $(\times)$. Từ đó đặt $1 \leqslant v \leqslant 2, v$ nguyên, ta có bất đẳng thức sau về số dấu $(\times)$ trên hình

$$m.n = s.1 + y.v \geqslant s + y \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có $5m.n \geqslant 5(s + y) = 4s + 5y + s = 2n(2m + 1) + s$ hay $s \leqslant 5m.n - 2n(2m + 1) = m.n - 2n = n(m - 2)$.

Áp dụng với $m = 996$ và $n = 1000$ có kết quả $s \leqslant 994000$. Sự tồn tại của cách ghép với $s = 994000$ cho trên hình vẽ.



Bài 2. 1) Ta có

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^3 &= \Big(a_n + \frac{1}{\sqrt{a_n}}\Big)^3 = a_n^3 + 3a_n\sqrt{a_n} + 3 + \frac{1}{a_n\sqrt{a_n}} \\
&> a_n^3 + 3a_n\sqrt{a_n} + \frac{9}{4} = (\sqrt{a_n^3} + \frac{3}{2})^2 \\
&\Rightarrow \sqrt{a_{n+1}^3} > \sqrt{a_n^3} + \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{a_n^3} > \frac{3n}{2} \quad \forall n \geqslant 1 \qquad (1)
\end{aligned}$$

2) Mặt khác

$$a_{n+1} = \Big(\sqrt{a_n} + \frac{1}{2a_n}\Big)^2 - \frac{1}{4a_n^2} < \Big(\sqrt{a_n} + \frac{1}{2a_n}\Big)^2$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sqrt{a_{n+1}} < \sqrt{a_n} + \frac{1}{2a_n} \\
&\Rightarrow \sqrt{a_{n+1}^3} < \sqrt{a_n^3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4}.\frac{1}{a_n\sqrt{a_n}} + \frac{1}{8a_n^3} \\
&\Rightarrow \sqrt{a_n^3} < 1 + \frac{3n}{2} + \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k\sqrt{a_k}} + \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k^3}, \quad \forall n \geqslant 1
\end{aligned}$$

Từ (1) suy ra với $n > 1$ thì

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k^3} < 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^3} < 1 + \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} < K = const$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k\sqrt{a_k}} < 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k\sqrt{a_k}} \leqslant 1 + \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^3}} < 1 + K'\sqrt{n} \quad \text{với} \quad K' = const$$

Do vậy

$$\sqrt{a_n^3} < \frac{3n}{2} + K_1 + K_2.\sqrt{n} \quad \forall n > 1$$

ở đây $K_1, K_2 = const$

3) Từ kết quả của 1) và 2) ta được:

$$\frac{3n}{2} < a_n^{\frac{3}{2}} < \frac{3n}{2} + K_1 + K_2.\sqrt{n} \quad \forall n > 1$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{\frac{3}{2}}}{n} = \frac{3}{2} \qquad (2)$$

Từ (1) ta có $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Do đó, kết hợp với (2) suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^\alpha}{n} = +\infty \qquad \text{với} \quad \alpha > \frac{3}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^\alpha}{n} = 0 \qquad \text{với} \quad \alpha < \frac{3}{2}$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^\alpha}{n} = L \neq 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

.

Bài 3. 1) Tìm max A. Viết lại A dưới dạng

$$A = 5(x_1^2 + x_4^2) + 6(x_2^2 + x_3^2) - 8(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4) + 2x_1x_3 + 2x_2x_4$$

Với mọi $\alpha > 0$ ta có

$$-8x_1x_2 \leqslant \alpha x_1^2 + \frac{16}{\alpha}x_2^2 \quad \text{dấu } "=" \Leftrightarrow \quad \alpha x_1 = -4x_2 \qquad (1)$$
$$-8x_2x_3 \leqslant 4(x_2^2 + x_3^2) \quad \text{dấu } "=" \Leftrightarrow \quad x_2 = -x_3 \qquad (2)$$
$$-8x_3x_4 \leqslant \alpha x_4^2 + \frac{16}{\alpha}x_3^2 \quad \text{dấu } "=" \Leftrightarrow \quad \alpha x_4 = -4x_3 \qquad (3)$$
$$2x_1x_3 \leqslant \frac{\alpha}{4}x_1^2 + \frac{4}{\alpha}x_3^2 \quad \text{dấu } "=" \Leftrightarrow \quad \alpha x_1 = 4x_3 \qquad (4)$$
$$2x_2x_4 \leqslant \frac{4}{\alpha}x_2^2 + \frac{\alpha}{4}x_4^2 \quad \text{dấu } "=" \Leftrightarrow \quad \alpha x_4 = 4x_2 \qquad (5)$$

Do vậy

$$A \leqslant \left(5 + \frac{5\alpha}{4}\right)(x_1^2 + x_4^2) + \left(10 + \frac{20}{\alpha}\right)(x_2^2 + x_3^2)$$

Chọn $\alpha > 0$ thoả mãn

$$5 + \frac{5\alpha}{4} = 10 + \frac{20}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = 2(1 + \sqrt{5}$$

. Khi đó

$$A \leqslant (5 + \frac{5\alpha}{4})(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \leqslant 5 + \frac{5\alpha}{4} = \frac{5}{2}(3 + \sqrt{5})$$

Ta có $A = \frac{5}{2}(3 + \sqrt{5}) \Leftrightarrow$ có đồng thời (1), (2), (3), (4), (5) và $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1$

$$\Leftrightarrow x_1 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}}, x_2 = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}x_1, x_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x_1, x_4 = -x_1$$

Vậy

$$\max A = \frac{5}{2}(3+\sqrt{5})$$

2) Tìm $\min A$: Lấy $1 < \alpha < 2$. Viết lại A dưới dạng

$$A = (x_1 - \alpha x_2 + x_3)^2 + (x_2 - \alpha x_3 + x_4)^2 + -2(4-\alpha)x_1x_2 - 4(2-\alpha)x_2x_3 - \\ - 2(4-\alpha)x_3x_4 + 4(x_1^2 + x_4^2) + (5-\alpha^2)(x_2^2 + x_3^2)$$

Do $\alpha < 2$ nên $\forall \beta > 0$ ta có

$$-2(4-\alpha)x_1x_2 \geqslant -(4-\alpha)\Big(\beta x_1^2 + \frac{x_2^2}{\beta}\Big) \quad "=" \Leftrightarrow \beta x_1 = x_2 \tag{6}$$

$$-2(4-\alpha)x_3x_4 \geqslant -(4-\alpha)\Big(\beta x_4^2 + \frac{x_3^2}{\beta}\Big) \quad "=" \Leftrightarrow \beta x_4 = x_3 \tag{7}$$

$$-4(2-\alpha)x_2x_3 \geqslant -2(2-\alpha)(x_2^2 + x_3^2) \quad "=" \Leftrightarrow x_2 = x_3 \tag{8}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} A &\geqslant -2(4-\alpha)x_1x_2 - 4(2-\alpha)x_2x_3 - 2(4-\alpha)x_3x_4 + \\ &+ 4(x_1^2 + x_4^2) + (5-\alpha^2)(x_2^2 + x_3^2) \\ &\geqslant [4 - (4-\alpha)\beta](x_1^2 + x_4^2) + [1 + 2\alpha - \frac{4-\alpha}{\beta} - \alpha^2](x_2^2 + x_3^2) \end{aligned}$$

Chọn β sao cho

$$4 - (4-\alpha)\beta = 1 + 2\alpha - \frac{4-\alpha}{\beta} - \alpha^2 \tag{9}$$

Khi đó

$$A \geqslant [4 - (4-\alpha)\beta](x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \geqslant \frac{1}{2}[4 - (4-\alpha)\beta]$$

Dấu " = " ở bất đẳng thức cuối cùng đạt được khi và chỉ khi có đồng thời

$$(I)\begin{cases} \beta x_1 = x_2 \\ \beta x_4 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_1 - \alpha x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - \alpha x_3 + x_4 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dễ thấy, các giá trị x_1, x_2, x_3, x_4 thoả mãn hệ trên là các giá trị có cùng dấu. Bởi vậy, để đơn giản ta sẽ chỉ xét $x_i = 0, i = \overline{1,4}$. Với điều kiện đó ta có

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_3, \quad x_1 = x_4 \\ x_1 = \frac{1}{\beta}x_2 \\ x_1 = (\alpha-1)x_2 \\ 2x_1^2 + 2x_2^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_2, \quad x_4 = x_1 \\ x_1 = (\alpha-1)x_2 \\ \alpha - 1 = \frac{1}{\beta} \\ x_1 = \frac{1}{2\sqrt{1+\beta^2}} \end{cases} \tag{10}$$

Bây giờ ta sẽ xác định β nhờ vào (9) và (10). Thế (10) vào (9) ta được

$$4 + \Big(\frac{1}{\beta} - 3\Big)\beta = 2 - \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta}\Big(\frac{1}{\beta} - 3\Big)$$
$$\Leftrightarrow \beta^2 - \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\text{do} \quad \beta > 0)$$

Từ đó

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.\frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

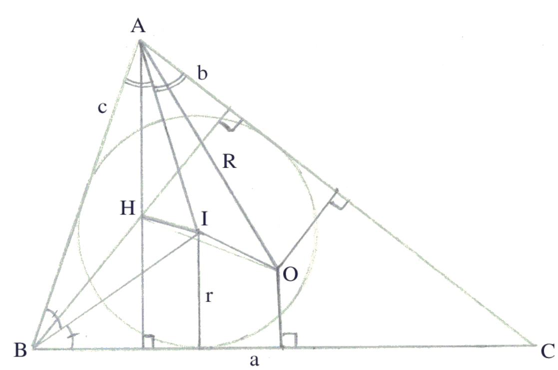
Vậy

$$\min A = \frac{7-3\sqrt{5}}{4}$$

đạt được khi

$$x_1 = x_4 = \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}, \quad x_2 = x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

Bài 4. (Hình học phẳng)



Từ hai đẳng thức quen thuộc (với $a = BC, b = CA, c = AB$)

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \tag{1}$$

và
$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0} \tag{2}$$
suy ra
$$(a+b+c)\overrightarrow{OI} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} \tag{3}$$
và
$$(a+b+c)\overrightarrow{IH} = (b+c)\overrightarrow{OA} + (c+a)\overrightarrow{OB} + (a+b)\overrightarrow{OC} \tag{4}$$
Để ý rằng $2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 2R^2 - a^2, 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 2R^2 - b^2, 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 2R^2 - c^2$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, từ (3) và (4) suy ra
$$(a+b+c)^2\overrightarrow{OI}^2 = (a+b+c)^2R^2 - abc(a+b+c) \tag{5}$$
$$(a+b+c)\overrightarrow{IH}^2 = 4(a+b+c)^2R^2 - (a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc) \tag{6}$$
Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ thì $\frac{abc}{a+b+c} = 2Rr$ nên từ (5) và (6) có:
$$OI^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c} = R(R-2r)$$
và
$$\begin{aligned} IH^2 &= 4R^2 - \frac{(a^3+b^3+c^3-3abc)+4abc}{a+b+c} \\ &= 4R(R-2r) - (a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab) \\ &= 4OI^2 - \frac{1}{2}[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2] \end{aligned}$$
Từ đó $IH \leqslant 2IO$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ tức là $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Bài 5. Ký hiệu $p(n)$ là ước nguyên tố lớn nhất của n. Ký hiệu $\alpha(n)$ là số mũ của $p(n)$ trong phân tích nguyên tố của n.

1) Trước hết, chứng minh nhận xét sau:

Nhận xét: Nếu $p(x_0) > k$ thì tồn tại ít nhất một chỉ số $m_1 > 0$ sao cho $p(x_{m_1}) < p(x_0)$.

Chứng minh: Giả sử $x_0 = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ với $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ là tất cả các ước nguyên tố của x_0. Khi đó.
$$x_1 = f(x_0) = kp_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_r^{\alpha_r-1}(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_r-1) \tag{1}$$
Vì $p_r > k > 1$ nên từ (1) suy ra:

+) Nếu $\alpha(x_0) = \alpha_r > 1$ thì $p(x_1) = p(x_0) = p_r$ và $\alpha(x_1) = \alpha(x_0) - 1$

+) Nếu $\alpha(x_0) = \alpha_r = 1$ thì $p(x_1) < p(x_0) = p_r$ Từ đó suy ra $p(x_{\alpha_r}) < p(x_0)$. Nhận xét được chứng minh.

2) Từ nhận xét trên suy ra nếu $p(x_0) > k$ thì sẽ tồn tại chỉ số M sao cho $p(x_M) \leqslant k$. Như thế, $\forall a > 1$ luôn $\exists M \geqslant 0$ sao cho $p(x_M) \leqslant k$. Do đó

+) Với $k = 2$ thì $p(x_M) = 2$ suy ra x_M có dạng $x_M = 2^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}^*$ hay $x_{M+1} = f(x_M) = 2^\alpha$. Suy ra $x_m = x_M, \forall m \geqslant M$, vậy dãy $\{x_M\}_0^\infty$ là dãy bị chặn $\forall a > 1$.

+) Với $k = 3$ thì $p(x_M) = 2$ hoặc $p(x_M) = 3$. Do vậy, x_M sẽ có một trong các dạng sau:

$$\begin{array}{lll} *) & x_M = 2^\alpha.3^\beta & \text{với} \quad \alpha, \beta \geqslant 1 \\ *) & x_M = 3^\beta & \text{với} \quad \beta \geqslant 1 \\ *) & x_M = 2^\alpha & \text{với} \quad \alpha \geqslant 1 \end{array}$$

- Xét $x_M = 2^\alpha.3^\beta$. Khi đó $x_{M+1} = f(x_M) = 2^\alpha.3^\beta \Rightarrow x_m = x_M, \forall m \geqslant M$
- Xét $x_M = 3^\beta$. Khi đó $x_{M+1} = f(x_M) = 2.3^\beta \Rightarrow x_m = x_{M+1}, \forall m \geqslant M + 1$ (theo kết quả của bước trên).
- Xét $x_M = 2^\alpha$. Khi đó

$$x_{M+1} = f(x_M) = \begin{cases} 3 & \text{nếu} \quad \alpha = 1 \\ 3.2^{\alpha-1} & \text{nếu} \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

Từ đó, theo kết quả của hai bước trên, ta sẽ có $x_m = x_{M+2}, \forall m \geqslant M + 2$ (trường hợp $\alpha = 1$) hoặc $x_m = x_{M+1}, \forall m \geqslant M + 1$ (trường hợp $\alpha > 1$).

Tóm lại, với $k = 3$ thì dãy $\{x_m\}_0^\infty$ là dãy bị chặn $\forall a > 1$.

Xét $k > 3$. Với chú ý rằng: $\forall m \in \mathbb{N}, \forall k > 1$ nếu $p(x_m) \leqslant k$ thì $p(x_{m+1}) \leqslant k$ (dễ thấy từ cách xác định dãy $\{x_m\}_0^\infty$), ta thấy $p(x_m) \leqslant k, \forall m \geqslant M$. Do đó, $\forall m \geqslant M$ ta có:

$$\begin{aligned} x_{m+1} = f(x_m) &= kx_m(1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_r}) \\ &> kx_m(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \cdots (1 - \frac{1}{k}) \quad (\text{do} \quad p_r \leqslant k \quad \text{và} \quad k > 3) \\ &= x_m. \end{aligned} \tag{2}$$

Mà dãy $\{x_m\}_0^\infty$ là dãy các số nguyên dương, nên từ (2) suy ra dãy $\{x_m\}_0^\infty$ là dãy không bị chặn $\forall a > 1$.

Vậy dãy $\{x_m\}_0^\infty$ là dãy bị chặn $\forall a > 1$ khi và chỉ khi $k = 2$ hoặc $k = 3$.

Bài 6. Xét n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mà có thể tô màu tất cả các đoạn A_iA_j thoả mãn đề bài. Xét $grafG$ có tập đỉnh $V = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ và tập cạnh là các đoạn được tô màu xanh. Dễ thấy G đơn, vô hướng, n đỉnh và thoả mãn:

a) $d(A_i) \leqslant 4, \forall i = \overline{1, n} \quad (d(A_i)$ ký hiệu bậc của đỉnh $A_i)$.

b) Với bất cứ hai đỉnh A_i, A_j nào cũng đều tồn tại một xích đơn nối chúng và có độ dài nhỏ hơn hoặc bằng 2.

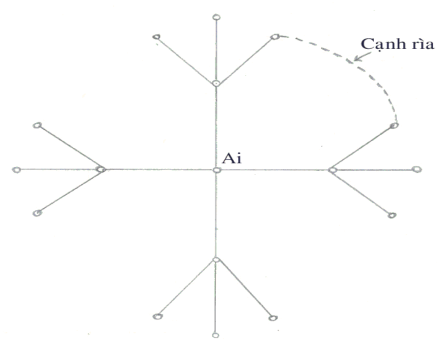
Vấn đề đặt ra ở bài đã ra tương đương với tìm số đỉnh n lớn nhất của $grafG$ đơn, vô hướng và thoả mãn a) và b).

Xét G đơn, vô hướng, n đỉnh và thoả mãn a) và b). Xét một đỉnh A_i bất kỳ của G. Khi đó mỗi đỉnh trong số $n-1$ đỉnh còn lại phải hoặc kề với A_i hoặc kề với ít nhất một đỉnh kề với A_i (theo b)). Kết hợp với a) suy ra $n \leqslant 1 + 4 + 3 \times 4 = 17$.

1) Xét n=17: Khi đó dễ thấy, phải có

$$d(A_i) = 4 \quad \forall i = \overline{1, 17} \tag{*}$$

và do đó G có tất cả $\frac{4 \times 17}{2} = 34$ cạnh.



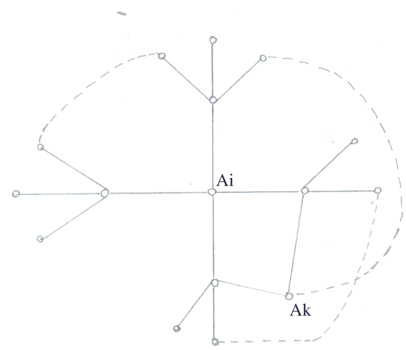
Hình 1

Xét đỉnh A_i bất kỳ của G. Từ (*) suy ra A_i kề với đúng 4 đỉnh khác, giả sử là $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{i_4}$. Qui ước gọi tất cả các đỉnh còn lại của G là các đỉnh rìa, và gọi tất cả các cạnh có cả hai đầu mút là hai đỉnh rìa là các cạnh rìa. Từ b) và (*) suy ra mỗi đỉnh $A_{ij}, (j = \overrightarrow{1, 4})$ (xem H.1). Từ đó dễ thấy không có hai đỉnh nào của G cùng với A_i lập thành nhóm ba đỉnh đôi một kề nhau, nên trong G không có ba đỉnh nào đôi một kề nhau (vì A_i lấy ra xét là đỉnh bất kỳ). Vậy mỗi cạnh rìa đều có hai đầu mút là hai đỉnh rìa không cùng kề với một đỉnh A_{ij} suy ra mỗi cạnh rìa cho ta một chu trình đơn độ dài 5 và đi qua A_i. Mà số cạnh rìa có tất cả $34 - 16 = 18$, nên có tất cả 18 chu trình đơn độ dài 5 và đi qua A_i. Vì A_i là đỉnh bất kỳ nên từ đó suy ra số chu trình đơn độ dài 5 trong G có tất cả là: $\frac{18 \times 17}{5} \notin \mathbb{Z}$, vô lý. Vậy $n \neq 17$.

2) Xét n=16. Khi đó dễ thấy, phải có

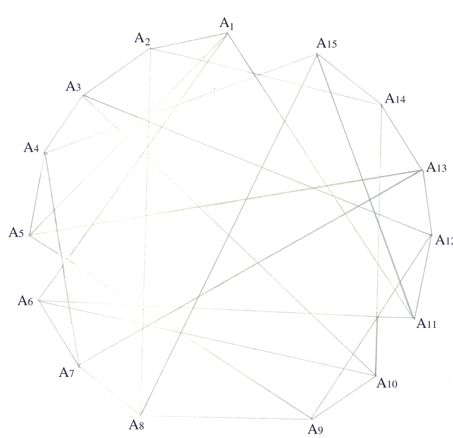
$$d(A_i) = 4 \quad \forall i = \overline{1, 16} \tag{1}$$

và do đó G có tất cả $\frac{16 \times 4}{2} = 32$ cạnh. Xét một đỉnh A_i bất kỳ của G. Theo (1), A_i kề với đúng 4 đỉnh khác, giả sử là $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{i_4}$. Tiếp tục, bằng phương pháp lập luận như ở 1), ta sẽ được: mỗi đỉnh $A_{ij}, (j = \overline{1,4})$ đều kề với đúng ba đỉnh rìa và có đúng một đỉnh rìa, tạm gọi là A_k, kề với đúng hai đỉnh A_{i_j} (xem H.2). Từ đó, do A_i là bất kỳ nên suy ra: Trong G không có ba đỉnh nào đôi một kề nhau, suy ra mỗi cạnh rìa không liên thuộc A_k cho ta đúng một chu trình đơn độ dài 5 và đi qua A_i, còn mỗi cạnh rìa liên thuộc A_k cho ta đúng hai chu trình đơn độ dài 5 và đi qua A_i. Mà số cạnh rìa có tất cả là $32 - 16 = 16$ và trong số này có đúng hai cạnh liên thuộc A_k (do $d(A_k) = 4$), nên suy ra có tất cả $14 \times 1 + 2 \times 2 = 18$ chu trình đơn độ dài 5 đi qua A_i. Vì A_i bất kỳ nên suy ra số chu trình đơn độ dài 5 trong G có tất cả là $\frac{18\times 16}{5} \notin \mathbb{Z}$, vô lý. Vậy $n \neq 16$.



Hình 2

3) Xét $n = 15$. Ta có G được mô tả ở (H.3) thoả mãn mọi yêu cầu đặt ra.



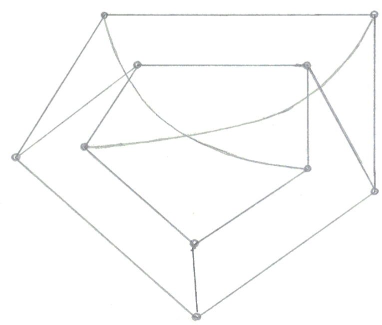
Hình 3

Vậy $n_{\max} = 15$.

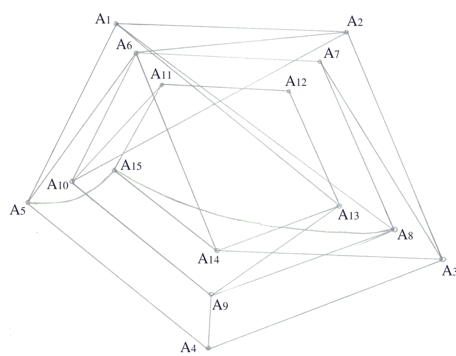
Bình luận:

1) Việc xây dựng G có 15 đỉnh xuất phát từ *graf* quen thuộc (graf Peterson) (H.4) và bởi vậy G còn có thể mô tả như sau (H.5).

2) Có thể xét trường hợp $n = 16$ bằng cách khác dễ lập luận chặt chẽ hơn. Tuy nhiên việc xét như đã trình bày ở trên đảm bảo cho lời giải nhất quán về phương pháp.



Hình 4



Hình 5

3) Lời giải trên chỉ dùng cho người chấm thi.

2.3 Đáp án chọn đội tuyển năm học 1993 - 1994

Bài 1. a) Đặt $BE = x, \quad AB = CD = a, \quad CF = y, \quad AD = BC = b$. Từ $S_{ABE} = S_{BCF}$ có

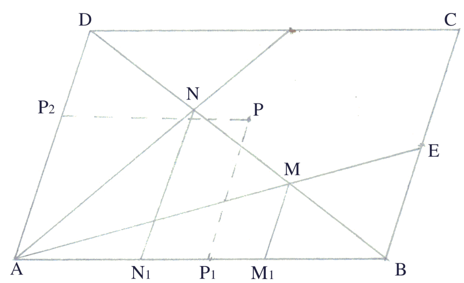
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}.AB.BE\sin\alpha = \frac{1}{2}.BC.CF\sin(180^0 - \alpha) \\ \Leftrightarrow \quad & AB.BE = BC.CF \\ \Leftrightarrow \quad & a.x = b.y \qquad (1) \end{aligned}$$

b) Kẻ $DB//AE$ cắt tia BC tại P thì $CP = BE = x$. Kẻ $BQ//AF$ cắt tia

DC tại Q thì $CQ = FQ - CF = a - y$. Theo định lý Talet, ta có:

$$\frac{BM}{BD} = \frac{BE}{BP} = \frac{x}{b+x} \tag{2}$$

$$\frac{DN}{DB} = \frac{DF}{DQ} = \frac{a-y}{2a-y} \tag{3}$$



Từ đó tính

$$\begin{aligned} MN^2 - BM^2 - DN^2 &= (BD - BM - DN)^2 - BM^2 - DN^2 \\ &= BD^2 - 2BD.BM - 2BD.DN + 2BM.DN \end{aligned}$$

hay

$$\frac{MN^2 - BM^2 - DN^2}{BD^2} = 1 - 2\frac{BM}{BD} - 2\frac{DN}{BD} + 2\frac{BM}{BD}.\frac{DN}{BD} \tag{4}$$

Thay (2),(3) vào (4) ta được

$$\begin{aligned} &\frac{MN^2 - BM^2 - DN^2}{BD^2} = 1 - \frac{2x}{b+x} - \frac{2(a-y)}{2a-y} + 2\frac{x}{b+x}\frac{a-y}{2a-y} = \\ &= \frac{1}{(b+x)(2a-y)}[(b+x)(2a-y) - 2x(2a-y) - \\ &\qquad - 2(a-y)(b+x) + 2x(a-y)] \\ &= \frac{(2a-y)(b-x) - 2(a-y)b}{(b+x)(2a-y)} = \frac{yb + yx - 2ax}{(b+x)(2a-y)} \end{aligned} \tag{5}$$

Thay (1) vào tử số của (5) được

$$yb + yx - 2ax = ax + yx - 2ax = yx - ax = -x(a-y)$$

Vậy

$$\frac{MN^2 - BM^2 - DN^2}{BD^2} = -\Big(\frac{x}{b+x}\Big)\Big(\frac{a-y}{2a-y}\Big) = -\frac{BM}{BD}.\frac{DN}{BD}$$

hay

$$MN^2 = BM^2 + DN^2 - BM.DN \tag{6}$$

Nếu dựng $\triangle M'N'S$ sao cho $SM' = BM, SN' = DN$ và góc đối diện với $M'N'$ bằng 60^0 thì

$$M'N'^2 = SM'^2 + SN'^2 - SM'.SN' \tag{7}$$

So sánh (6) và (7) ta có $MN = M'N'$, nghĩa là tồn tại $\triangle AM'N'$ có các cạnh tương ứng bằng MN, BM, DN. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle SM'N'$. Theo định lý hàm số sin ta có

$$MN = M'N' = 2R \sin 60^0 = \sqrt{3}R$$

nên MN' và R cùng giảm.

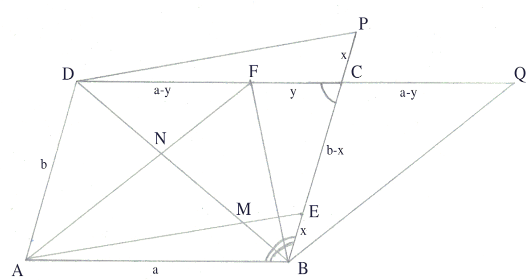
Bài 1. a) Xét biểu thức

$$\varphi = \frac{BM^2 + DN^2 - MN^2}{2BM.DN}$$

chỉ cần chứng minh $-1 \leqslant \varphi \leqslant 1$ (φ đó sẽ là cosin của góc α đối diện cạnh của tam giác mà ta cần chứng minh sự tồn tại). Kẻ MM_1, NN_1 song song DA (M_1, N_1 thuộc AB) thì do Talet

$$\varphi = \frac{BM_1^2 + AN_2^2 - M_1N_1^2}{2BM_1.AN_1}$$

Với mỗi điểm P trong hình bình hành $ABCD$, kẻ PP_1 song song DA ($P_1 \in AB$), kẻ PP_2 song song AB ($P_2 \in AD$), gọi $x(P) = \frac{AP_1}{AB}, y(P) = \frac{AP_2}{AD}$.



Giả thiết cho

$$\frac{BE}{AD} = \frac{FC}{AB} = t \quad 0 < t < 1$$

P thuộc đường chéo $BD \quad \Leftrightarrow x(P) + y(P) = 1$ (*)

P thuộc $AE \quad \Leftrightarrow y(P) = tx(P)$ (**)

P thuộc $AF \quad \Leftrightarrow y(P) = \dfrac{1}{1-t}x(P)$ (***)

Từ (*), (**) suy ra

$$x(M_1) = \frac{AM_1}{AB} = \frac{1}{1+t}$$

Từ (*), (***) suy ra

$$x(N_1) = \frac{AN_1}{AB} = \frac{1-t}{2-t}$$

Từ đó

$$\frac{M_1B}{AB} = 1 - x(M_1) = \frac{t}{1+t}, \quad \frac{AN_1}{AB} = x(N_1) = \frac{1-t}{2-t}$$

$$\frac{M_1N_1}{AB} = x(M_1) - x(N_1) = \frac{t^2-t+1}{(1+t)(2-t)}$$

Vậy

$$\varphi = \frac{\left(\frac{t}{1+t}\right)^2 + \left(\frac{1-t}{2-t}\right)^2 - \left(\frac{t^2-t+1}{(1+t)(2-t)}\right)^2}{2\frac{t(1-t)}{(1+t)(2-t)}}$$

dễ tính $\varphi = \frac{1}{2}$

Vậy $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

b) Bán kính R đường tròn ngoại tiếp tam giác vừa xây dựng xác định bởi

$$R = \frac{MN}{2\sin\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}MN$$

nên khi MN càng nhỏ thì R càng nhỏ.

Bài 2. a)

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - Nxyzt - N = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad t(t - Nxyzt) = N - (x^2 + y^2 + z^2) \quad (2)$$

Với ba số nguyên dương bất kỳ a, b, c và $N = a^2+b^2+c^2$ thì dễ thấy phương trình (2) có nghiệm

$$x_0 = a, y_0 = b, z_0 = c, t_0 = Nabc = (a^2+b^2+c^2)abc \quad (*)$$

Chú ý rằng khi hoán vị bốn số $a, b, c, Nabc$ ta lại được nghiệm (x_1, y_1, z_1, t_1) của phương trình (1).

b) Giả sử phương trình (1) có nghiệm nguyên dương, chọn (x_0, y_0, z_0, t_0) là nghiệm nguyên dương của (1) sao cho tổng $x_0 + y_0 + z_0 + t_0$ là số nguyên dương nhỏ nhất. Không làm mất tính chất tổng quát, giả định rằng $x_0 \leqslant y_0 \leqslant z_0 \leqslant t_0$.

Ta sẽ chứng minh rằng với $N \geqslant 7$ thì nghiệm nguyên dương của phương trình (1) với $x_0 \leqslant y_0 \leqslant z_0 \leqslant t_0$ nếu có phải có dạng (*) như trên.

Theo giả thiết t_0 là nghiệm của phương trình bậc hai

$$t^2 - Nx_0y_0z_0t + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - N = 0 \tag{3}$$

Phương trình (3) có nghiệm thứ hai t_1 thoả mãn:

$$t_1 + t_0 = Nx_0y_0z_0 \tag{4}$$

$$t_1.t_0 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - N \tag{5}$$

Từ (4) suy ra $t_1 \in \mathbb{Z}$. Lại theo giả thiết

$$N(1 + x_0y_0z_0t_1) = t_1^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 0$$

nên

$$t_1 > -\frac{1}{x_0y_0z_0}$$

Vì $t_1 \in \mathbb{Z}$ nên $t_1 \geqslant 0$.

Giả sử $t_1 > 0$ khi đó (x_0, y_0, z_0, t_1) là nghiệm nguyên dương của (1). Do cách chọn (x_0, y_0, z_0, t_0) thì $x_0 + y_0 + z_0 + t_1 \geqslant x_0 + y_0 + z_0 + t_0$ nên $t_1 \geqslant t_0$. Từ đó theo (5) ta có

$$t_0^2 \leqslant t_1t_0 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - N < x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \leqslant 3z_0^2$$

Ta có

$$N(1+x_0y_0z_0^2) \leqslant N(1+x_0y_0z_0t_0) = x_0^2+y_0^2+z_0^2+t_0^2 \leqslant z_0^2+z_0^2+z_0^2+3z_0^2 = 6z_0^2$$

Từ đó, do $N \geqslant 7$ nên $N(1 + x_0y_0z_0^2) \leqslant 6z_0^2 < Nz_0^2$ suy ra $1 + x_0y_0z_0^2 < z_0^2$.

Điều vô lý này chứng tỏ $t_1 > 0$ là sai, suy ra $t_1 = 0$. Từ (4), (5) suy ra

$$N = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \quad \text{và} \quad t_0 = Nx_0y_0z_0$$

là nghiệm (*) của phương trình (1).

Với $N = 4^k(8m + 7) \geqslant 7$, áp dụng kết quả trên thì $N = x^2 + y^2 + z^2$. Do đó nếu chứng minh được phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 4^k(8m + 7)$ không có nghiệm nguyên dương thì phương trình (1) cũng không có nghiệm nguyên dương.

+) Khi $k = 0$ ta có $x^2 + y^2 + z^2 = 8m + 7$ hay $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7 \pmod 8$. Trong ba số x, y, z phải có một số lẻ hoặc cả ba số lẻ. Nếu số a lẻ thì $a^2 \equiv 1 \pmod 8$, do đó $x^2 + y^2 + z^2 \neq 7 \pmod 8$.

+) Khi $k > 0$ ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4^k(8m + 7) \qquad (*)$$

hay $x^2+y^2+z^2 \equiv 0 \pmod 4$. Trong ba số x, y, z phải có một số chẵn hoặc ba số chẵn. Nếu có một số chẵn, còn hai số a, b lẻ thì $a^2+b^2 \equiv 2 \pmod 4)$, suy ra $x^2+y^2+z^2 \neq 7 \pmod 8$. Nếu x, y, z đều chẵn, đặt $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$ thì (*) tương đương với $x^2 + y^2 + z^2 = 4^{k-1}(8m + 7)$. Sau k lần biến đổi như thế ta có $x^2 + y^2 + z^2 = 8m + 7$, nhưng phương trình này vô nghiệm nguyên dương như khi xét $k = 0$

Bài 3.a)

$$\frac{1-4x}{x^2}P(x) + \Big(1 - \frac{1-4x}{x^2}\Big)P'(x) - P''(x) = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-4x}{x^2}(P(x) - P'(x)) + (P'(x) - P''(x)) = 0 \qquad (2)$$

Đặt $Q(x) = P(x) - P'(x)$ thì $Q'(x) = P'(x) - P''(x)$ nên

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-4x}{x^2}Q(x) + Q'(x) = 0 \qquad (3)$$

b) Ta chứng minh nếu đa thức bậc bốn $P(x)$ có bốn nghiệm dương thì đa thức bậc bốn $Q(x) = P(x) - P'(x)$ cũng có bốn nghiệm dương. Không mất tính chất tổng quát, giả định rằng hệ số bậc cao nhất của $P(x)$ là 1.Đặt

$$P(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

với x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm dương. Từ đó theo Định lý Viet thì $a, b, c, d > 0$.

$$\begin{aligned} P'(x) = &(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)+ \\ &+(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \end{aligned}$$

$$Q(x) = P(x) - P'(x) = x^4 + a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + c + d$$

Vì $Q(x_1)Q(x_2) < 0, Q(x_2)Q(x_3) < 0, Q(x_3)Q(x_4) < 0$ nên $Q(x)$ có ba nghiệm dương là y_1, y_2, y_3. Gọi nghiệm thứ tư là y_4 thì $y_1y_2y_3y_4 = c + d > 0$ nên $y_4 > 0$. Vậy $Q(x)$ có bốn nghiệm dương.

c) Đặt $R(t) = t^4Q(\frac{1}{t})$. Vì $Q(x)$ có bốn nghiệm dương thì $R(t)$ cũng có bốn nghiệm dương, do đó lại áp dụng kết quả trên, đa thức $R(t) - R'(t)$ cũng có bốn nghiệm dương.

$$\begin{aligned} R(t) - R'(t) &= t^4Q(\frac{1}{t}) - \Big[4t^3Q(\frac{1}{t}) - \frac{t^4}{t^2}Q'(\frac{1}{t})\Big] \\ &= (t^4 - 4t^3)Q(\frac{1}{t}) + t^2Q'(\frac{1}{t}) \end{aligned}$$

Hay phương trình sau có bốn nghiệm dương

$$(t^4 - 4t)Q(\frac{1}{t}) + Q'(\frac{1}{t}) = 0 \tag{4}$$

Đặt $x = \frac{1}{t}$ thì phương trình (4) trở thành phương trình (3), nên phương trình (3)

$$\frac{1-4x}{x^2}Q(x) + Q'(x) = 0$$

cũng có bốn nghiệm dương.

Bài 3. Đặt $P_1(x) = e^{-x}P(x)$. Vì đa thức $P(x)$ có bốn nghiệm dương nên phương trình $P_1(x) = 0$ có bốn nghiệm dương. Suy ra, phương trình

$$P_1'(x) = 0 \tag{1}$$

có ba nghiệm dương. Ta có:

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x}[P(x) - P'(x)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) - P'(x) = 0$$

Như vậy, đa thức $Q(x) = P(x) - P'(x)$ có ba nghiệm dương, giả sử là x_1, x_2, x_3. Tuy nhiên, do $degQ(x) = 4$ (vì $degP(x) = 4$) nên $Q(x)$ còn có nghiệm thực thứ tư x_4.

Vì đa thức bậc bốn $P(x)$ có bốn nghiệm dương nên không mất tổng quát, có thể coi $P(x)$ có dạng

$$P(x) = ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e, \quad \text{với} \quad a,b,c,d,e > 0$$

Từ đó

$$Q(x) = ax^4 + \cdots + (-d-2c)x + (e+d)$$

Suy ra (theo Định lý Viet)

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{e+d}{4} > 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 > 0$$

Vậy $Q(x)$ có bốn nghiệm dương.

Xét đa thức (biến t):

$$R(t) = t^4Q(\frac{1}{t})$$

. Dễ thấy $degR(t) = 4, R(t)$ có bốn nghiệm dương. Do đó, theo kết quả phần trên ta có phương trình

$$R(t) - R'(t) = 0 \tag{2}$$

có bốn nghiệm dương. Ta có

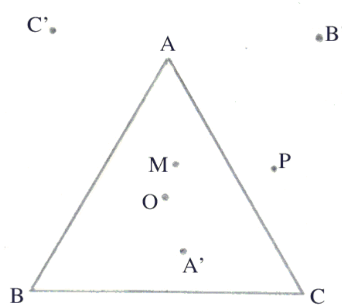
$$\begin{aligned}(2) \Leftrightarrow\ & t^4[P(\frac{1}{t}) - P'(\frac{1}{t})] - \{t^4[P(\frac{1}{t}) - P'(\frac{1}{t})]\}' = 0\\ \Leftrightarrow\ & t^4[P(\frac{1}{t}) - P'(\frac{1}{t})] - \{4t^3[P(\frac{1}{t}) - P'(\frac{1}{t})] + t^4[-\frac{1}{t^2}P'(\frac{1}{t}) + \frac{1}{t^2}P''(\frac{1}{t})]\}\\ \Leftrightarrow\ & (t^2-4t)P(\frac{1}{t}) + (1+4t-t^2)P'(\frac{1}{t}) - P''(\frac{1}{t}) = 0 \qquad (3)\end{aligned}$$

Đặt $\frac{1}{t} = x$. Từ phương trình (3) ta có phương trình (ẩn x):

$$\frac{1-4x}{x^2}P(x) + \Big(1 - \frac{1-4x}{x^2}\Big)P'(x) - P''(x) = 0 \qquad (4)$$

Do (3) có bốn nghiệm dương nên phương trình (4) có bốn nghiệm dương. (Đpcm).

Bài 4. Lấy tâm O của tam giác đều ABC làm gốc của mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, coi A, B, C có toạ vị a, b, c thì $b = ae^{\frac{2i\pi}{3}}, c = ae^{\frac{4i\pi}{3}}$. Nếu gọi M có toạ vị z_0 thì A', B', C' có toạ vị $a' = 2z_0 - a, b' = 2z_0 - b, c' = 2z_0 - c$.



Gọi P là điểm mà $B'AP$ là "tam giác" đều định hướng thuận (có thể suy biến thành 1 điểm nếu $B' \equiv A$) tức P có toạ vị p' mà $p - b' = e^{\frac{i\pi}{3}}(a - b')$. Vậy với chú ý $b = ce^{\frac{-2i\pi}{3}}, a + b + c = 0,\quad$ và $\quad 1 - e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{-i\pi}{3}}, e^{\frac{-2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}}(e^{i\pi} - 1) = 0$ ta có

$$\begin{aligned}p &= b' + e^{\frac{i\pi}{3}}(a - b') = 2z_0 + b + e^{\frac{i\pi}{3}}(a - 2z_0 + b)\\ &= 2z_0 + ce^{\frac{-2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}(c + 2z_0)\\ &= 2z_0(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}) + c(e^{\frac{-2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}})\\ &= 2z_0e^{\frac{-i\pi}{3}}\end{aligned}$$

Vì kết quả không phụ thuộc a, b, c nên bằng cách hoán vị vòng quanh A, B, C được $C'BP, A'CP$ cũng là tam giác đều định hướng thuận. Vậy P cách đều B' và A, C' và B, A' và C.

Nếu còn có $Q \neq P$ cách đều các cặp điểm đó thì $\overrightarrow{PQ} \neq \overrightarrow{0}$ trực giao với $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CA'}$ khi đó ba véctơ này cùng phương tức là O cùng các điểm có toạ vị $b' - a = 2z_0 + c, c' - b = 2z_0 + a, a' - c = 2z_0 + b$ phải thẳng hàng, khi đó O và các điểm có toạ vị $a - b = a(1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}), a - c = a(1 - e^{\frac{4i\pi}{3}})$ phải thẳng hàng là điều vô lý.

b) Xét biểu thức đồng dạng f xác định bởi $z_0 \mapsto f(z_0) = p = 2z_0 e^{\frac{-i\pi}{3}}$ (tích quay góc $-\frac{\pi}{3}$ với vị trí tỷ số 2 cùng tâm O). Trung điểm D của AB có toạ vị $\frac{a+b}{2}$ nên $f(D)$ có toạ vị $(a+b)e^{\frac{-i\pi}{3}} = -ce^{\frac{-i\pi}{3}} = -ae^{\frac{4i\pi}{3}} e^{\frac{-i\pi}{3}} = a$, vậy $f(D) = A$. Vậy có biến đổi đồng dạng $f, f(0) = 0, f(D) = A, f(M) = P$, từ đó f biến đường thẳng $DM(M \neq D)$ thành đường thẳng AP. Hai đường thẳng này phải cắt nhau tại một điểm N mà có một véctơ chỉ phương đường thẳng DM tạo với một véctơ chỉ phương đường thẳng AP tạo thành góc $-\frac{\pi}{3}$, tức góc định hướng giữa hai đường thẳng đó là $-\frac{\pi}{3}$ hay $\frac{2\pi}{3}$. Khi $M \equiv O$ thì $P \equiv O$, MNP không tạo thành tam giác; Khi $M \neq O$, góc định hướng giữa hai đường thẳng OM, OP cũng là $-\frac{\pi}{3}$ hay $\frac{2\pi}{3}$, nên tứ giác $MNPO$ nội tiếp: đường tròn ngoại tiếp MNP qua tâm O của ABC. (Điều vừa chứng minh đúng cho mọi đồng dạng thuận)

Bài 4. Qua phép đối xứng tâm $S_M = R_M^{180^0}$ thì

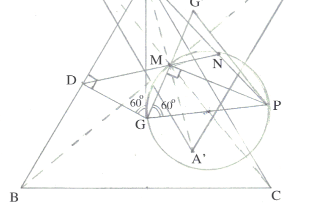
$$G \to G'$$
$$\triangle ABC \to A'B'C'$$

Qua phép quay

$$R_{G'}^{120^0}: \quad \triangle A'B'C' \to \triangle B'C'A'$$

trong đó G, G' là trọng tâm $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$

$$\triangle ABC \quad \xrightarrow{R_M^{180^0}} \quad \triangle A'B'C' \quad \xrightarrow{R_{G'}^{120^0}} \quad \triangle B'C'A'$$



Tích hai phép quay có thể là phép tịnh tiến khi tổng của hai góc quay là bội của 180^0, có thể là phép quay trong trường hợp còn lại. Ở đây tổng hai góc quay là $180^0 + 120^0 = 300^0 \equiv -60^0 \pmod{360^0}$ nên tích là phép quay tâm P xác định $R_{G'}^{120^0}.R_M^{180^0} = R_P^{-60^0}$. Qua phép quay $R_P^{-60^0}$ thì

$$\triangle ABC \to \triangle B'C'A'$$

$$G \to G'$$

nên tồn tại duy nhất điểm P cách đều A và B',cách đều B và C', cách đều C và A'.

Từ đó $PG = PG'$ và $(PG, PG') = -60^0$. Mặt khác $S_M : G \to G'$ nên M là trung điểm của GG'. Vậy $\triangle PGG'$ là tam giác đều và $GM \perp MP, GM = \frac{MP}{2}$.

b) Xét phép đồng dạng S là phép vị tự quay $S = R_G^{(GA,GD)}.H_G^{\frac{1}{2}}$ thì

$$S = \triangle GPA \to \triangle GMD$$

trong đó $(GA, GD) = 60^0$. Vì đường thẳng AP biến thành đường thẳng DM nên góc $\widehat{MNP} = 60^0$ hoặc $\widehat{MNP} = 120^0$ tuỳ theo góc $\widehat{MNP}$ là nhọn hoặc tù. Vì $\widehat{PGM} = 60^0$ nên nếu $\widehat{MNP} = 60^0$ là góc nhọn thì G và N đều nhìn đoạn PM dưới một góc 60^0 suy ra G, N, M, P cùng thuộc một đường tròn, nếu $\widehat{MNP} = 120^0$ là góc tù thì $\widehat{MNP} + \widehat{MGP} = 120^0 + 60^0 = 180^0$ nên tứ giác $GMNP$ là tứ giác nội tiếp trong một đường tròn. Đường tròn này luôn đi qua điểm G là trọng tâm $\triangle ABC$, nên G là điểm cố định.

Cách khác giải câu a: Dựng tam giác đều $AB'P$ ngược hướng với tam giác đều ABC. Ta chứng minh rằng các $\triangle BC'P, \triangle CA'P$ cũng là tam giác đều và cùng hướng với $\triangle AB'P$. Thật vậy

$$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB'} = f(\overrightarrow{BA}) + f(\overrightarrow{AB}) = f(\overrightarrow{BP})$$

trong đó f là phép quay véctơ của mặt phẳng, góc $+60^0$. Chứng minh tương tự ta cũng có $\overrightarrow{CA'} = f(\overrightarrow{CP})$. Bởi vậy $\triangle BC'P$ và $\triangle CA'P$ là các tam giác đều, cùng hướng với $\triangle AB'P$, do đó trung trực của AB', BC', CA' đồng quy ở tâm quay P, góc quay bằng 60^0, biến $\triangle ABC$ thành $\triangle B'C'A'$.

Bài 5.

$$f(\sqrt{2}x) + f((4 + 3\sqrt{2})x) = 2f((2 + \sqrt{2})x) \quad \forall x \tag{1}$$

a) Với $x = 0$ thì ta có $2f(0) = 2f(0)$, vậy $f(0) = a$ là hằng số tuỳ ý.

b) Với $x > 0$ ta đặt $(2 + \sqrt{2})x = t$ hay $x = \frac{t}{2+\sqrt{2}}$. Lúc đó (1) trở thành

$$f\Big(\frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}t\Big) + f\Big(\frac{4 + 3\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}t\Big) = 2f(t) \quad \forall t > 0 \tag{2}$$

Ta chú ý rằng $\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$ và

$$\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}.\frac{4+3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}+6}{6+4\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \frac{4+3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

Ta đặt $t = (\sqrt{2}-1)^u$ thì (2) trở thành

$$f\Big((\sqrt{2}-1)^{u+1}\Big) + f\Big((\sqrt{2}-1)^{u-1}\Big) = 2f\Big((\sqrt{2}-1)^{u}\Big) \quad \forall u \tag{3}$$

Lại đặt $f\Big((\sqrt{2}-1)^{u}\Big) = g(u)$ thì (3) trở thành

$$\begin{aligned} & g(u+1) + g(u-1) = 2g(u) \quad \forall u && (4) \\ \Leftrightarrow & g(u+1) - g(u) = g(u) - g(u-1) \quad \forall u \end{aligned}$$

Đặt $g(u+1) - g(u) = h(u)$ thì $h(u+1) = h(u) \quad \forall u$. Bằng quy nạp dễ thấy

$$g(u+n) = nh(u) + g(u)$$

Vậy

$$g(u) = \begin{cases} h(u) + k(u) & \text{với} \quad 0 \leqslant u < 1 \\ nh(u) + k(u-n) & \text{với} \quad n \leqslant u < n+1 \end{cases} \forall n \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

trong đó, $k(u), h(u)$ là các hàm tuỳ ý, $h(u)$ tuần hoàn chu kỳ 1. Thay lại theo biến số $x > 0$ ta được

$$f(x) = g\Big(\log_{\sqrt{2}-1} x\Big) \quad \text{với} \quad x > 0$$

trong đó, $g(u)$ được xác định theo (5).

c) Với $x < 0$ ta đặt $-(2+\sqrt{2})x = t = (\sqrt{2}-1)^u$ ta có

$$f(x) = g\Big(\log_{\sqrt{2}-1} |x|\Big) \quad \text{với} \quad x < 0$$

Tóm lại

$$f(x) = \begin{cases} a \quad \text{tuỳ ý} & \text{khi} \quad x = 0 \\ g\Big(\log_{\sqrt{2}-1} |x|\Big) & \text{khi} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

còn $g(u)$ được xác định theo (5).

Bài 6. Xét tập A gồm tất cả có bộ thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_{1994}, \ldots, a_{1993+1994})$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

1) $a_i \in \{0, 1\} \quad \forall i = \overline{1, 1993+1994}$

2) Số 1 có mặt đúng 1994 lần trong mỗi bộ.

Xét phân hoạch

$$A = \bigcup A_{(n_1,n_2,\ldots,n_{1994})}$$

ở đây

+) Hợp lấy theo tất cả các bộ có thứ tự các số tự nhiên $(n_1, n_2, \ldots, n_{1994})$ thoả mãn $n_1 + 2n_2 + \cdots + 1994n_{1994} = 1994$.

+) $A_{(n_1,n_2,\ldots,n_{1994})}$ là tập gồm tất cả các bộ có thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_{1993+1994}) \in A$ và thoả mãn điều kiện là trong mỗi bộ có đúng n_k nhóm $k \quad \forall k = \overline{1, 1994}$. (Nhóm k được định nghĩa là nhóm gồm đúng k số 1 đứng liên tiếp trong bộ, nói khác đi là nhóm có 1 trong các dạng sau $(\underbrace{1\ldots1}_{k \text{số} 1}0; 0\underbrace{1\ldots1}_{k \text{số} 1}0; 0\underbrace{1\ldots1}_{k \text{số} 1}))$.

Có

$$CardA = C^{1993}_{1993+1994}$$

$$\begin{aligned} CardA_{(n_1,n_2,\ldots,n_{1994})} &= \frac{1994!}{n_1!n_2!\ldots n_{1994}!(1994 - n_1 - \cdots - n_{1994})!} \\ &= \frac{1994!}{n_1!n_2!\ldots n_{1994}!(n_2 + 2n_3 + \cdots + 1993n_{1994})!} \end{aligned}$$

Mà

$$CardA = \sum CardA_{(n_1,n_2,\ldots,n_{1994})}.$$

Nên suy ra:

$$T = \frac{1}{1994!} C^{1993}_{1993+1994}$$

.

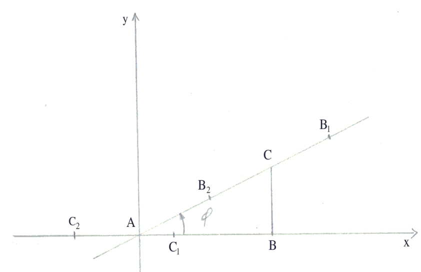
2.4 Đáp án chọn đội tuyển năm học 1994 - 1995

Bài 1. Cho tam giác ABC với mỗi điểm M, gọi khoảng cách đại số từ M đến đường thẳng BC là $\pm$ (khoảng cách thông thường từ M đến BC), lấy dấu $+$ hay $-$ tuỳ theo M cùng phía hay khác phía với A đối với BC (tất nhiên M thuộc BC thì khoảng cách đó bằng không). Tương tự cho khoảng cách đại số từ M đến CA, AB.

1) Xét các đường tròn $(AB_1C_1), (AB_2C_2)$ như trong đề bài. Hãy chứng minh trục đẳng phương của cặp đường tròn đó là quỹ tích các điểm M mà các khoảng cách đại số từ M đến AB và đến CA tỉ lệ với γ vàβ.

Thực vậy, lấy hệ toạ độ vuông góc Oxy mà $O \equiv A,\ B \in Ox^+$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \varphi, 0 < \varphi < 180°$. Khi đó $\frac{\overrightarrow{AB}}{c} = (1, 0),\ \frac{\overrightarrow{CA}}{b} = (-\cos\varphi, \sin\varphi)$. Gọi

$$\begin{cases} B_1 = (b_1 \cot\varphi, b_1), \\ B_2 = (b_2 \cot\varphi, b_2), \\ C_1 = (c_1, 0), \\ C_2(c_2, 0) \end{cases}, \quad c_1, c_2 \neq 0,\ \ c_1 \neq c_2,\ \ b_1, b_2 \neq 0,\ \ b_1 \neq b_2$$



thì $\overrightarrow{B_1B_2} = \frac{\beta}{b}\overrightarrow{CA}$ hay $((b_2 - b_1)\cot\varphi, b_2 - b_1) = \beta(-\cos\varphi, -\sin\varphi)$ suy ra $b_2 - b_1 = -\beta\sin\varphi$.

Ta cũng có $\overrightarrow{C_1C_2} = \frac{\gamma}{c}\overrightarrow{AB}$ tương đương với $(c_2 - c_1, 0) = \gamma(1, 0)$ hay $c_2 - c_1 = \gamma$.

Đường tròn (AB_1C_1) đia qua A, C_1 nên $x^2 + y^2 - c_1x - \lambda_1 y = 0$, nó đi qua B_1 nên $\lambda_1 = \frac{b_1 - c_1 \sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$, đường tròn (AB_2C_2): $x^2 + y^2 - c_2x - \lambda_2 y = 0$, $\lambda_2 = \frac{b_2 - c_2\sin\varphi\cos\varphi}{\beta}$.

Trục đẳng phương hai đường tròn đó là

$$\begin{aligned} &(c_2 - c_1)x + (\lambda_2 - \lambda_1)y = 0 \\ \Leftrightarrow\quad &\gamma x - \frac{\beta + \gamma\cos\varphi}{\sin\varphi} y = 0 \end{aligned}$$

hay

$$\frac{y}{\gamma} = \frac{x\sin\varphi - y\cos\varphi}{\beta}$$

Để ý rằng y là khoảng cách đại số từ $M(x, y)$ đến AB còn $x\sin\varphi - y\cos\varphi$ là khoảng cách đại số từ $M(x, y)$ đến CA, ta suy ra điều phải chứng minh.

2) Với mỗi điểm M, kí hiệu X, Y, Z là khoảng cách đại số từ M đến BC, CA, AB thì dễ thấy $aX + bY + cZ = 2S$, (S là diện tích tam giác ABC) và ngược lại (X, Y, Z) mà $aX + bY + cZ = 2S$ xác định một điểm M duy nhất có các khoảng cách đại số nói trên là X, Y, Z.

Theo phần 1), phương trình d_A là $\frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma}$, của d_B là $\frac{X}{\alpha} = \frac{Z}{\gamma}$, của d_C là $\frac{Z}{\alpha} = \frac{Y}{\beta}$. Điểm chung của d_A, d_B, d_C (nếu có) là điểm $M(X, Y, Z)$ mà

(X, Y, Z) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} aX + bY + cZ = 2S \\ \frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma} \end{cases}$$

hay

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma} = \frac{2S}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$$

hệ đó có nghiệm (và chỉ có một nghiệm) khi và chỉ khi $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$.

Chú ý: Nếu $(AB_1C_1), (AB_2C_2)$ cắt nhau tại $A' \neq A$, có thể chứng minh phần 1) (trong trường hợp này) nhờ phép đồng dạng thuận tâm A', biến B_1 thành C_1, biến B_2 thành C_2 và để hoàn thiện 1) còn cần xét (AB_1C_1), (AB_2C_2) tiếp xúc nhau.

Bài 2. Gọi A là tập các giá trị n $(n \geq 3)$ để đa thức $P_n(x)$ khả quy. Với $n \in A$ ta có

$$P_n(x) = f(x).g(x) \tag{*}$$

trong đó

$$\begin{aligned} f(x) &= a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \\ g(x) &= b_s x^s + \cdots + b_1 x + b_0 \\ P_n(x) &= x^{n+1} + kx^n - 870x^2 + 1945x + 1995 \\ m &\geq 1,\ s \geq 1,\ m + s = n + 1 \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh $m = 1$ hoặc $s = 1$.

Giả sử có $m \geq 2$ và $s \geq 2$ suy ra $m < n$ và $s < n$. Vì $a_0 b_0 = 1995$ chia hết cho 5 và không chia hết cho 25 nên chỉ có một trong hai số a_0, b_0 là chia hết cho 5, chẳng hạn $a_0 \vdots 5$ và b_0 không chia hết cho 5. Trong dãy $a_0, a_1, ..., a_m$ gọi r là chỉ số nhỏ nhất để a_r không chia hết cho 5, $(1 \leq r \leq m < n$, chú ý tồn tại r vì a_m bằng $\pm 1)$. Từ (**??**) suy ra $c_r = a_r b_0 + a_{r-1} b_1 + \cdots + a_0 b_r$. Do cách chọn r thì $a_0, a_1, ..., a_{r-1}$ đều chia hết cho 5, c_r là hệ số của x^r trong $P_n(x)$ cũng chia hết cho 5, suy ra $a_r b_0 \vdots 5$, điều này mâu thuẫn với a_r, b_0 đều không chia hết cho 5. Vậy giả sử $m \geq 2$ và $s \geq 2$ là sai, suy ra hoặc $m = 1$ hoặc $s = 1$, lúc đó $P_n(x)$ có nghiệm nguyên với $\forall n \in A$. Xét các trường hợp sau

a) Nếu $|x_n| \geq 2\ \forall n \in \mathbb{A}$. Khi đó từ

$$x^n(x + k) = 870x^2 - 1945x - 1995$$

ta có

$$|x_n + k| = \frac{|870x^2 - 1945x - 1995|}{|x_n|^n}$$

Vì A vô hạn nên với $n \in A$ đủ lớn thì $|x_n + k| < 1$ suy ra $x_n + k = 0$ suy ra $870x_n^2 - 1945x_n - 1945 = 0$ hay $174x_n^2 - 389x_n - 399 = 0$. Vì $399 \vdots 3$ và $197 \vdots 3$ nên $x_n \vdots 3$. Đặt $x_n = 3y$, ta có $522y^2 - 389y - 133 = 0$ suy ra $k = -3$.

b) Nếu $|x_n| < 2, \forall n \in A$ thì x_n chỉ có thể là $+1, -1$.

Với $x_n = 1$ thì $P_n(1) = 0$ suy ra $k = -3071$.

Với $x_n = -1$ thì $P_n(-1) = 0$.

Từ đó với n chẵn thì $k = 821$, còn với n lẻ thì $k = -819$.

Thử lại, thấy nếu $k = -3$, $k = -3071$ thì $P_n(x)$ khả quy $\forall n \geq 3$. Nếu $k = 821$ thì $P_n(x)$ khả quy với $\forall n$ chẵn. Nếu $k = -819$ thì $P_n(x)$ khả quy với $\forall n$ lẻ.

Bài 3. Có $a^3 + b^3 \geq 2(ab)^{3/2}$ suy ra $(a^3 + b^3)^n \geq 2^n (ab)^{3n/2} \geq 4(ab)3n/2$ vì $n \geq 2$. Vì vậy, từ

$$(a^3 + b^3)^n = 4(ab)^{1995}$$

ta được $3n \leq 3990$. Đặt $(a, b) = d$ ta có $a = da_1$, $b = db_1$ và $(a_1, b_1) = 1$. Khi đó, từ (**??**) có $d^{3n}(a_1^3 + b_1^3)^n = 4d^{2990}(a_1 b_1)^{1995}$ hay

$$(a_1^3 + b_1^3)^n = 4d^{3990-3n}(a_1 b_1)^{1995}.$$

Suy ra $(a_1^3 + b_1^3)^n \vdots (a_1 b_1)^{1995}$ suy ra $(a_1^3 + b_1^3)^n \vdots (a_1 b_1)^n$ (do $n < 1995$ vì $3n \leq 3990$) suy ra $a_1^3 + b_1^3 \vdots a_1 b_1$. Do vậy

$$\begin{cases} a_1^3 \vdots b_1 \\ b_1^3 \vdots a_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \vdots b_1 \\ b_1 \vdots a_1 \end{cases}$$

(do $(a_1, b_1) = 1$) nên $a_1 = b_1 = 1$, lại do $(a_1, b_1) = 1$) suy ra $a = b = d$. Khi đó từ (**??**) có $2^{n-2} = d^{3990-3n}$. Vì $d > 1$ nên suy ra d có dạng 2^k với $k \geq 1$, và do đó $n - 2 = k(3990 - 3n)$ hay $n = \frac{3990k+2}{3k+1}$, và do đó $n = 1330 - \frac{1328}{3k+1}$. Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $1328 \vdots 3k + 1$. Do $1328 = 2^4.83$ và

$$2^i \equiv \begin{cases} 1 \pmod 3 & \text{nếu } i \text{ chẵn} \\ 2 \pmod 3 & \text{nếu } i \text{ lẻ} \end{cases}, \qquad 2^i.83 \equiv \begin{cases} 1 \pmod 3 & \text{nếu } i \text{ chẵn} \\ 2 \pmod 3 & \text{nếu } i \text{ lẻ} \end{cases}$$

nên suy ra $3k + 1 \in \{2^2, 2^4, 2 \times 83, 2^3 \times 83\}$.

Với $3k + 1 = 4$ có $k = 1$ suy ra $a = b = 2$ và $n = 998$.

Với $3k + 1 = 16$ có $k = 5$ suy ra $a = b = 2^5$ và $n = 1247$.

Với $3k + 1 = 166$ có $k = 55$ suy ra $a = b = 2^{55}$ và $n = 1322$.

Với $3k + 1 = 664$ có $k = 221$ suy ra $a = b = 2^{221}$ và $n = 1328$.

Bài 4. Xét graph G có tập đỉnh là tập gồm n điểm đã cho và tập cạnh là tập gồm $\frac{1}{2}(n^2-3n+4)$ đoạn thẳng đã cho. Từ giả thiết của bài toán ta thấy trong G tồn tại một cạnh mà sau khi bỏ nó đi thì được G' không liên thông. Giả sử a và b là hai đỉnh không liên thông với nhau trong G'.

Gọi V_a và V_b lần lượt là tập gồm tất cả các đỉnh của G' mà liên thông với a và b. Giả sử $|V_a| = n_1$ và $|V_b| = n_2$.

Dễ thấy, G' có $\frac{1}{2}(n^2-3n+2)$ cạnh; $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1$, $n_1+n_2 \leq n$ và

$$\frac{1}{2}(n^2-3n+2) \leq \frac{1}{2}n_1(n_1-1)+\frac{1}{2}n_2(n_2-1)+\frac{1}{2}(n-n_1-n_2)(n-n_1-n_2-1)$$

hay $(n_1-1)(1-n_2)+(n-n_1-n_2)(1-n_1-n_2) \geq 0$. Do đó

$$\begin{cases}(n_1-1)(1-n_2)=0\\(n-n_1-n_2)(n_1+n_2-1)=0\end{cases}$$

Vậy $n_1 = n-1$, $n_2 = 1$ hoặc $n_2 = n-1$ và $n_1 = 1$.

Từ đó suy ra G' có một đỉnh cô lập và $(n-1)$ đỉnh mà bậc của mỗi đỉnh bằng $n-2$. Do đó G có một đỉnh bậc 1, $(n-2)$ đỉnh mà bậc của mỗi đỉnh bằng $n-2$ và một đỉnh có bậc bằng $n-1$. Bởi thế chu trình đơn có độ dài lớn nhất trong G là chu trình đơn độ dài $n-1$ nếu $n \geq 4$, 0 nếu $n = 2$hoặc $n = 3$.

Vậy

$$k_{\max} = \begin{cases} n-1 & \text{nếu } n \geq 4\\ 0 & \text{nếu } n=2,\ n=3\end{cases}$$

Bài 5. Giả sử $n+1 = 2^{f(n)}(1+2\alpha)$, $p+1 = 2^{f(p)}(1+2\beta)$ với $\alpha, \beta \geq 0$.

Cặp số (n,p) là cặp số đẹp khi và chỉ khi $2^{f(n)} > p$ hay

$$2^{f(n)} \geq p+1 \tag{1}$$

Từ đó ta có $n+1 = 2^{f(n)}(1+2\alpha) \geq p+1$ suy ra

$$n \geq p \tag{2}$$

Từ (1) ta có $2^{f(n)} \geq p+1 = 2^{f(p)}(1+2\beta)$ suy ra $2^{f(n)} \geq 2^{f(p)}$, thành thử $f(n) \geq f(p)$. Từ đó

$$(n+1) \vdots 2^{f(p)} \tag{3}$$

Ta cần tìm bộ ba số (n,p,q) sao cho ba cặp số (n,p) (p,q) và $(n+p+q,n)$ đều là các cặp số đẹp.

Giả sử $n+p+q+1 = 2^{f(n+p+q)}(1+2\gamma)$.

Theo (2) vì (n,p) và (p,q) là cặp số đẹp nên $n+p+q+1 \le 3n+1$. Vì $(n+p+q,n)$ là cặp số đẹp nên $2^{f(n+p+q)} \ge n+1$ theo (1). Kết hợp các điều kiện trên có

$$2^{f(n+p+q)}(1+2\gamma) = n+p+q+1 \le 3n+1 \le 3(2^{f(n+p+q)}-1)+1 < 3.2^{f(n+p+q)}$$

suy ra $1+2\gamma < 3$, và do đó $1+2\gamma = 1$ hay

$$n+p+q+1 = 2^{f(n+p+q)} \tag{4}$$

Mặt khác, $2^{f(n+p+q)} \ge n+1 = 2^{f(n)}(1+2\alpha)$ suy ra

$$f(n+p+q) \ge f(n) \tag{5}$$

Từ $2^{f(n+p+q)} = n+p+q+1 = (n+1)+(p+1)+(q-1)$ theo (3) và (5) ta có $(n+1)\vdots 2^{f(p)}$ và $(p+1)\vdots 2^{f(p)}$ suy ra $(q-1)\vdots 2^{f(p)}$, nhưng từ cặp số đẹp (p,q) có $2^{f(p)} > q$ nên chỉ xảy ra hai trường hợp hoặc $q=0$ và $f(p)=0$, hoặc $q=1$ và $f(p)>0$.

Xét $q=0$ và $f(p)=0$, từ (4) có $n+p+q+1 = n+p+1 = 2^{f(n+p+q)}$, đồng thời $n+p+1 = (n+1)+p = 2^{f(n)}(1+2\alpha)+p$.

Từ (5) và $2^{f(n)}(1+2\alpha)+p$ suy ra $p\vdots 2^{f(n)}$ mà $2^{f(n)} > p$ nên $p=0$. Từ cặp số đẹp $(n+p+q,n) = (n,n)$ suy ra $n+1 \ge 2^{f(n)} \ge n+1$ suy ra $n-1 = 2^{f(n)} = 2^m$. Tử lại, ta thấy bộ ba số $(n,p,q) = (2^m-1,0,0)$ thỏa mãn với $m \in \mathbb{Z}$ và $m \ge 0$.

Xét $q=1$ và $f(p)>0$. Từ (4) ta có $2^{f(n+p+q)} = n+p+q+1 = (n+1)+(p+1) = 2^{f(n)}(1+2\alpha)+2^{f(p)}(1+2\beta)$. Chú ý rằng $f(n+p+q) \ge f(n) \ge f(p)$ suy ra $2^{f(p)}\vdots 2^{f(n)}$ nên $f(p)=f(m)$.

Từ $2^{f(p)} = 2^{f(n)} \ge p+1 = 2^{f(p)}(1+2\beta)$ suy ra $1+2\beta = 1$ suy ra $p+1 = 2^{f(p)}$. Ta có $2^{f(n+p+q)} = n+p+q+1 = (n+1)(+(p+a) = n+1+2^{f(n)}$, suy ra $n+1 = 2^{f(n+p+q)} - 2^{f(n)} = 2^k - 2^m$. Thử lại ta thấy, bộ ba số $(n,p,q) = (2^k-2^m-1, 2^m-1, 1)$ thỏa mãn với $k,m \in \mathbb{Z}$ và $k > m \ge 1$.

Bài 6. 1) Ta tính đạo hàm

$$f'(x) = \frac{2x(x^3-3x+3)}{3(x^2-1)^2}.$$

Dễ dàng chứng minh được $x^3-3x+3 > 0\ \forall x > 1$. Từ đó suy ra $f'(x) > 0\ \forall x > 1$ và do đó hàm $f(x)$ đồng biến trên $(1,+\infty)$. Hơn nữa lại có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Nếu suy ra $f(x)$ với tập xác định $(1,+\infty)$ sẽ có tập giá trị là $(-\infty,+\infty)$.

Từ các kết quả ở trên, theo định lí về hàm ngược, ta suy ra tồn tại hàm $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có tập giá trị là $(1,+\infty)$, và $f(g(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

tiếp theo, ta sẽ chứng minh $g(x) > x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thật vậy, với $x \leq 1$ thì $g(x) > 1 \geq x$. Với $x > 1$ thì do $x - f(x) = \frac{x^3-3x+3}{3(x^2-1)}$ nên $x > f(x)$ $\forall x > 1$, hay $g(x) > x$, (do tính đồng biến của $f(x)$ trên $(1, +\infty)$.

2) Kí hiệu $g_n(x) = g(g(...g(x))...)$. Ta sẽ tìm a dưới dạng $a = g_n(x_0)$ với $x_0 \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&a_0 = g_n(x_0)\\
&a_1 = f(x_0) = g_{n-1}(x_0) > 1\\
&a_2 = f(a_1) = g_{n-2}(x_0) > 1\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n-1} = g(x_0) > 1\\
&a_n = x_0
\end{aligned}$$

Với $x_0 \neq \pm 1$ thì $a_{n+1} f(x_0)$. Do $g(x) > x$, $\forall x$ nên $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots a_n$. Suy ra nếu chọn x_0 sao cho $x_0 = \pm 1$ và $f(x_0) = g_n(x_0)$ thì dãy $\{a_n\}$ sẽ là dãy tuần hoàn với chu kỳ dương nhỏ nhất bằng $n+1$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh tồn tại x_0 thỏa mãn các điều kiện nói trên. Thật vậy, xét hàm $h(x) = f(x) - g_n(x)$ trên $(-1, 0]$. Ta có $h(0) = f(0) - g_n(0) = 1 - g_n(0) < 0$, và $\lim_{x \to -1^+} h(x) = +\infty$ (do $g_n(-1)$ là số xác định). Hơn nữa, do $h(x)$ liên tục trên $(-1, 0)$ của phương trình $h(x) = 0$, ta có $a > 1$ và dãy $\{a_n\}$ là dãy tuần hoàn với chu kỳ dương bé nhất bằng 1995.

2.5 Đáp án chọn đội tuyển năm học 1995 - 1996

Bài 1. Gọi $3n$ điểm đã cho là $A_1, A_2, ..., A_{3n}$. Hiển nhiên trong mặt phẳng chứa $3n$ điểm đó, ta có thể dựng được đường thẳng Δ sao cho $A_i \notin \Delta$, $i = \overline{1, 3n}$, $A_1, A_2, ..., A_{3n}$ nằm về cùng một phía của Δ; và Δ không song song với A_iA_j ($\forall inot = j \in \{1, 2, ..., 3n\}$).

Kí hiệu d_{A_i} là khoảng cách từ điểm A_i đến Δ. Khi đó $d_{A_i} \neq d_{A_j}$ ($\forall i \neq j \in \{1, 2, ..., 3n\}$). Không mất tính tổng quát, giả sử

$$d_{A_1} < d_{A_2} < \cdots < d_{A_{3n}} \tag{1}$$

Qua mỗi điểm A_{3i+1}, $i = \overline{0, ..., n-1}$, kẻ đường thẳng $\Delta_i \parallel \Delta$ dễ dàng suy ra n tam giác $A_{3j+1}A_{3j+2}A_{3j+3}$, $i = \overline{0, ..., n-1}$ đôi một rời nhau và mỗi điểm A_i, $i = \overline{1, 3n}$) là đỉnh có đúng một tam giác trong số n tam giác đó.

Bây giờ ta sẽ chứng minh tổng S diện tích của n tam giác nói trên thoả mãn $S < \frac{1}{2}$. Thật vậy, xét $\triangle A_{3i+1}A_{3i+2}A_{3i+3}$, $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$) và gọi S_i là diện tích của nó. Dễ thấy có thể dựng được hai đường thẳng a, b cùng vuông góc với Δ và sao cho

1) a đi qua đúng một trong ba điểm $A_{3i+1}, A_{3i+2}, A_{3i+3}$ còn b đi qua ít nhất một trong hai điểm còn lại.

2) cả ba điểm $A_{3i+1}, A_{3i+2}, A_{3i+3}$ cùng nằm trong dải phẳng (kể cả hai biên) bị giới hạn bởi a và b.

Thế thì nếu gọi $\{A\} = a \cap \Delta_i,\ \{B\} = a \cap \Delta_{i+1},\ \{C\} = b \cap \Delta_{i+2}, \{D\} = b \cap \Delta_i$ ta sẽ có hình chữ nhật $ABCD$

chứa toàn bộ $\Delta A_{3i+1}A_{3i+2}A_{3i+3}$. Từ đó $S_i < \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}AD.CD < \frac{1}{2}d_i$ với d_i là khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_i và Δ_{i+1}. Từ đó suy ra

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} S_i < \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} d_i \le \frac{1}{2}A_1A_{3n} \le \frac{1}{2}.$$

(vì $A_1A_{3n} \le 1$). Bài toán được chứng minh.

Bài 2. Từ $a_n = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{2i+1}{n} 3^i$ suy ra công thức tổng quát

$$a_n = \frac{(1+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}.$$

Xét n chẵn và n lẻ.

1) Với $n = 2k$, ta có $a_n = 2^k u_k$ với

$$u_k = \frac{(2+\sqrt{3})^k - (2-\sqrt{3})^k}{2\sqrt{3}} \tag{1}$$

Dãy $\{u_k\}$ thoả mãn

$$u_{k+2} = 4u_{k+1} \tag{2}$$

với $u_1 = 1, u_2 = 4$

Gọi $g(k)$ là số $l \in \mathbb{N}$ lớn nhất để $u_k \vdots 2^l$.

Từ $a_n = 2^k u_n$ suy ra

$$f(2^k) = k + g(h) \tag{3}$$

Từ (2) thấy k lẻ, suy ra u_k lẻ. Vậy k lẻ thì

$$g(k) = 0 \tag{4}$$

nghĩa là

$$f(2k) = k \ \text{ nếu } \ k \ \text{ lẻ} \tag{4'}$$

Xét $k = 2m$ chẵn thì

$$u_{2m} = u_m.d_m \ \text{ với } \ d_m = (2+\sqrt{3})^m + (2-\sqrt{3})^m \tag{5}$$

Dãy $\{d_m\}$ thoả mãn

$$d_{m+2} = 4d_{m+1} - d_m \text{ với } d_1 = 4,\ d_2 = 14 \tag{6}$$

Từ (6) và vì d_m chẵn với mọi m nên suy ra $d_{m+2} \equiv -d_m \pmod 8$.

$$\begin{matrix} \text{Nếu } m \text{ lẻ, thì } d_m \equiv 4 \pmod 8 \\ \text{Nếu } m \text{ chẵn, thì } d_m \equiv 6 \pmod 8 \end{matrix} \tag{7}$$

Từ (7) và $u_{2m} = u_m.d_m$ suy ra

$$g(2m) = \begin{cases} g(m) + 2 & \text{nếu } m \text{ lẻ} \\ g(m) + 1 & \text{nếu } m \text{ chẵn} \end{cases} \tag{8}$$

Với $k = 2^s h$, h lẻ thì từ (8) và $g(k) = 0$ suy ra

$$g(2^s h) = g(2^{s-1}h) + 1 = \cdots = g(2h) + s - 1 = g(h) + 2 + s - 1 = s + 1 \tag{9}$$

Từ (3), (9), và do (4$'$ ta có

$$f(2k) = \begin{cases} k & \text{với } k \text{ lẻ} \\ k + s + 1 & \text{với } k = 2^s h, s \geq 1, k \text{ lẻ} \end{cases} \tag{10}$$

2) Với $n = 2k + 1$. Ta thấy dãy $\{a_n\}$ thoả mãn

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n, \text{ với } a_1 = 1,\ a_2 = 2. \tag{11}$$

Ta chứng minh

$$f(2k+1) = k \tag{12}$$

bằng quy nạp với $k = 0, 1$ dễ thấy đúng. Giả sử đúng với k. Từ (10) có $f(2k) \geq k$ và theo giả thiết quy nạp $f(2k+1) = k$ nên

$$a_{2(k+1)+1} = 2a_{2(k+1)} + 2a_{2k+1} = 2.2^{k+1}.n + 2.2^k N = 2^{k+1}(2M + N)$$

với N lẻ theo quy nạp. Vậy $f(2(k+1)+1) = k+1$ đúng với $k+1$.

3) Tìm mọi n để $f(n) = 1996$

Nếu $2k+1$, theo $f(2k+1) = k$ thì $f(n) = f(2k+1) = k = 1996$ suy ra $n = 3993$.

Nếu $n = 2^{s+1}h$ với h lẻ. Với $s = 0$ suy ra $f(2k) = k$ lẻ không thoả mãn với $s \geq 1$ suy ra $f(2^{s+1}h) = 2^s h + s + 1 = 1996$ suy ra $2^s h + s = 1995$ suy ra h lẻ và $1 \leq s \leq 9$. Thử thấy $s = 1$, $n = 3998$ và $s = 3$, $n = 3984$ với $s = 5, 7, 9$ không có nghiệm. Đáp số $n = 3984,\ n = 3998,\ n = 3993$.

Bài 3. Đặt

$$
\begin{aligned}
f(a,b,c) &= (a+b+c)^4 + a^4 + b^4 + c^4 - 12abc(a+b+c) - \tfrac{4}{7}(a^4+b^4+c^4) \\
&= (a+b+c)^4 + \tfrac{3}{7}(a^4+b^4+c^4) - 12abc(a+b+c)
\end{aligned}
$$

Vì $f(a,b,c) = f(-a,-b,-c)$ nên chỉ cần xét $f(a,b,c)$ tại a,b,c mà $a+b+c \geq 0$. Khi đó chỉ có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau

Nếu $a,b,c \geq 0$. Lúc này ta có $a+b+c \geq 3(abc)^{1/3}$ suy ra $(a+b+c)^4 \geq 27abc(a+b+c)$ suy ra $f(a,b,c) \geq 15abc(a+b+c) \geq 0$ và $f(a,b,c) = 0$ khi và chỉ khi $a = b = c = 0$.

Nếu có đúng một trong ba số a,b,c là số âm. Khi đó có $f(a,b,c) > 0$.

Nếu có đúng hai trong ba số a,b,c là số âm. Không giảm tính tổng quát, coi $a,b,<0$ từ $a+b+c \geq 0$ suy ra $c \geq -a(+b) > 0$. Đặt $a = -\alpha, b = -\beta$ với $\alpha,\beta > 0$, thế thì $c \geq \alpha+\beta$ và

$$
\begin{aligned}
f(a,b,c) &= f(-\alpha,-\beta,c) \\
&= \{c-(\alpha+\beta)\}^4 + \tfrac{3}{7}(c^4+\alpha^4+\beta^4) - 12\alpha\beta c\{c-(\alpha+\beta)\}.
\end{aligned}
$$

Vì $\alpha,\beta > 0$ nên $\alpha^4+\beta^4 \geq 2(\frac{\alpha+\beta}{2})^4$ và $0 < \alpha < \beta \leq (\frac{\alpha+\beta}{2})^2$. Do đó ta có đánh giá

$$
\begin{aligned}
f(a,b,c) &\geq \{c-(\alpha+\beta)\}^4 + \tfrac{3}{7}\{c^4 + 2(\frac{\alpha+\beta}{2})^4\} - 12c(\frac{\alpha+\beta}{2})^2\{c-(\alpha+\beta)\} \\
&= (c-2x)^4 + \tfrac{3}{7}(c^4+2x^4) - 12cx^2(c-2x)
\end{aligned}
$$

trong đó $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $x > 0$.

Đặt $c = tx$, từ $c \geq 2x$ suy ra $t \geq 2$. Vậy ta tiếp tục đánh giá $f(a,b,c)$

$$
\begin{aligned}
f(a,b,c) &\geq x^4\{(t-2)^4 + \tfrac{3}{7}(t^4+2) - 12t(t-2)\} \\
&= x^4\{(t-2)^4 + (t^4+2) - 12t(t-2) - \tfrac{4}{7}(t^4+2)\} \\
&= x^4\{2(t-1)^4 + 16 - \tfrac{4}{7}(t^4+2)\} = 2x^4\{(t-1)^4 - \tfrac{2}{7}t^4 + \tfrac{52}{7}\}
\end{aligned}
$$

Xét $g(t) = (t-1)^4 - \frac{2}{7}t^4 + \frac{52}{7}$ trên $[2,+\infty)$. Ta có $g'(t) = 4\{(t-1)^3 - \frac{2}{7}t^3\}$. Dễ thấy rằng với $t \geq 2$ thì $g'(t) > 0$ hay $t > \frac{1}{1-t_0}$ với $t_0 = \sqrt{\frac{2}{7}}$, $g'(t) = 0$ khi và chỉ khi $t = \frac{1}{1-t_0}$, $g'(t) < 0$ khi và chỉ khi $2 \leq t \leq \frac{1}{1-t_0}$. Do đó $g(t) \geq g(\frac{1}{1-t_0})$ với $t \geq 2$.

Ta có

$$
g(\frac{1}{1-t_0}) = \tfrac{2}{7}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}\Big(\frac{1}{1-t_0}\Big)^4 - \tfrac{2}{7}\Big(\frac{1}{1-t_0}\Big)^4 + \tfrac{52}{7}.
$$

Do $t_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ nên

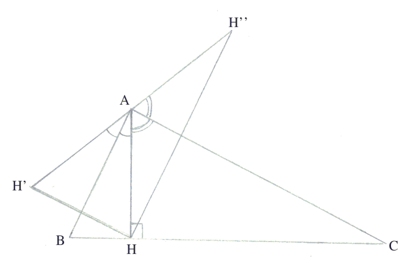
$$g\Big(\frac{1}{1-t_0}\Big) = \tfrac{2}{7}\left\{26 - (1 - t_0(\frac{1}{1-t_0})^4\right\} = \tfrac{2}{7}\left\{26 - \frac{1}{(1-t_0)^3}\right\}$$
$$= \tfrac{2}{7}\left\{26 - \frac{1}{(1-\sqrt[3]{\frac{2}{7}})^3}\right\}.$$

Ta chứng minh rằng $26 > \frac{1}{(1-\sqrt[3]{\frac{2}{7}})^4}$. Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với mỗi bất đẳng thức sau

$$1 - \sqrt[3]{\frac{2}{7}} - \sqrt[3]{\frac{1}{26}} > 0$$
$$1 - \frac{2}{7} - \frac{1}{26} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{91}} > 0$$
$$\frac{41}{182} > \frac{1}{\sqrt[3]{91}}$$
$$68921 > 66428.$$

Vậy nên $g(t) \geq g(\frac{1}{1-t_0}) > 0 \ \forall t \geq 2$. Tóm lại $f(a,b,c) \geq 0 \ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ và $f(0,0,0) = 0$ nên $\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} f(a,b,c) = 0$

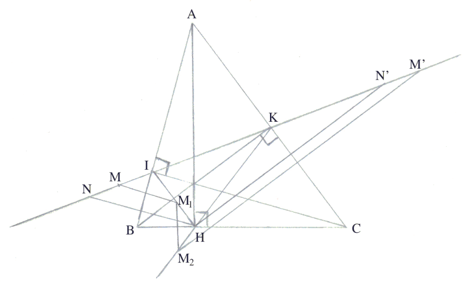
Bài 4. Chú ý rằng phép đối xứng qua đường phân giác AB của góc định hương $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AH'})$ biến $\overrightarrow{AH}$ thành $\overrightarrow{AH'}$, còn phép đối xứng qua đường phân giác ngoài AC của góc $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AH'})$ thì biến $\overrightarrow{AH}$ thành $\overrightarrow{AH''} = -\overrightarrow{AH'}$.



Hình 1

1) Giả sử $S_{AB}(M) = M_1,\ S_{BC}(M_1) = M_2,\ S_{CA}(M_2) = M'$. Đặt $f = S_{CA}.S_{BC}.S_{AB}$. Gọi H, K, I lần lượt là hình chiếu của A, B, C xuống cạnh đối diện. Gọi đường thẳng IK là Δ. Ta sẽ chỉ ra $f : \Delta \to \Delta$ và bảo tồn hướng của Δ.

a) Khi $\triangle ABC$ không vuông thì H, K, I phân biệt, do đó AB, BC, CA là phân giác ngoài của $\triangle HKI$. Khi có một góc tù, chẳng hạn $\angle A > 90°$ thì BC là phân giác ngoài, còn CA, AB là phân giác trong $\triangle HKI$. The chú ý trên, dễ thấy $f : \triangle \to \triangle$ và bảo tồn hướng của Δ.



Hình 2

b) Khi $\widehat{C} = \widehat{H} = \widehat{K} = 90°$ $(C \equiv K)$ thì Δ là đường thẳng CI.

c) Khi $\widehat{B} = \widehat{H} = \widehat{I} = 90°$ $(B \equiv I)$ thì Δ là đường thẳng BK.

d) Khi $\widehat{A} = \widehat{K} = \widehat{I} = 90°$ $(A \equiv I \equiv K)$ thì Δ là đường thẳng đối xứng của đường thẳng AH qua AB (hay qua AC) (Hình 1)

2) $f \mid \Delta : \Delta \to \Delta$ bảo tồn khoảng cách và hướng nên $f \mid \Delta$ là phép tịnh tiến theo véctơ $\overrightarrow{v}$ nào đó ($\overrightarrow{v} \parallel \Delta$) (xem hình 2: $M, N \in \Delta$, $M' = f(M)$, $N' = f(N)$ thì $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{v}$) và hình 1: $H' \in \Delta$, $H'' = f(H')$ thì $\overrightarrow{H'H''} = \overrightarrow{v}$).

Với M tuỳ ý, gọi J là hình chiếu vuông góc của M xuống Δ thì $f(J)$ là hình chiếu vuông góc của $f(M)$ xuống Δ và $\overrightarrow{JJ'} = \overrightarrow{v}$. Do f đảo hướng nên M và $f(M) = M'$ nằm khác phía đối với Δ nên $MM' \geq JJ' = |\overrightarrow{v}|$, và nếu $M \notin \Delta$ thì $MM' > JJ'$. Vậy tập hợp các điểm M để MM' đạt giác trị bé nhất là đường thẳng Δ.

3) a) Khi lấy liên tiếp phép đối xứng qua các trục là hoán vị vòng quanh ba cạnh $\triangle ABC$ được

$$S_{AB} \circ S_{CA} \circ S_{BC} = S_{AB} \circ f \circ S_{AB}$$
$$S_{BC} \circ S_{AB} \circ S_{CA} = S_{CA} \circ f \circ S_{CA}$$

đều có dạng $S_x \circ f \circ S_x = g$ (S_x là phép đối xứng qua trục x).

Đặt $\Delta' = S_x(\Delta)$ thì với $M_0 \in \Delta'$ khoảng cách

$$\begin{aligned}\rho(M_0, g(M_0)) &= \rho(M_0, S_x \circ f \circ S_x^{-1}(M_0)) \\ &= \rho(S_x^{-1}(M_0), f(S_x^{-1}(M_0)) = |\overrightarrow{v}| \leq \rho(M, f(M)) \\ &= \rho(M, S_x g S_x(M)) = \rho(S_x(M), g(S_x(M)))\end{aligned}$$

Vậy khoảng cách ngắn nhất đối với $g = S_x \circ f \circ S_x$ cũng là $|\overrightarrow{v}|$.

b) Khi lấy liên tiếp phép đối xứng qua các trục theo thứ tự sau:

$$S_{AB}.S_{BC}, S_{CA} = f^{-1}$$

thì khoảng cách bé nhất của MM' cũng như đối với f đã xét trên. Lấy hoán vị vòng quanh các trục đối xứng ở trên ta được

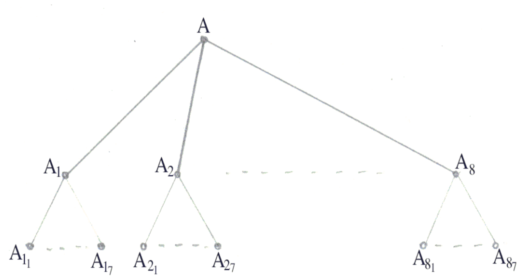
$$S_{CA} \circ S_{AB} \circ S_{BC}, \quad S_{BC} \circ S_{CA} \circ S_{AB}$$

đều có dạng $S_x \circ f^{-1} \circ S_x = g'$ nên theo a) khoảng cách ngắn nhất đối với g' cũng là $\overrightarrow{v}$.

Chú ý: Có thể chứng minh 1), 2): f là phép đối xứng trượt, trục Δ đi qua trung điểm $Mf(M)$ (M tuỳ ý) và xác định được Δ (một cách hình học) đến kết quả như trên, véctơ trượt là $\overrightarrow{v}$.

Có thể xét cụ thể các trường hợp tam giác ABC tương tự trên đây, tính được khoảng cách bé nhất nói trên là $|\overrightarrow{v}| = a\cos A + b\cos B + c\cos C$, chẳng hạn khi $\triangle ABC$ có ba góc nhọn thì $|\overrightarrow{v}|$ kà chu vi tam giác HIK nên $|\overrightarrow{v}|$ có tính chất đối xứng đối với a, b, c và $\angle A, \angle B, \angle C : |\overrightarrow{v}| = IH + HK + KI$.

Bài 5. Giả sử số học sinh được mời là 65 em. Ta đặt tương ứng mỗi em với một điểm trên mặt phẳng và hai em được đặt tương ứng với hai điểm khác nhau. Với mỗi cặp, hai em chưa quen nhau ta nối hai điểm tương ứng với hai em đó bởi một đoạn thẳng. Khi đó ta được một Graph đơn, vô hương, có 65 đỉnh, bậc mỗi đỉnh không nhỏ hơn 56 và với hai đỉnh kề nhau bất kỳ luôn tồn tại ít nhất một điểm không kề với cả hai đỉnh ấy, có 65 đỉnh và thoả mãn



1) Bậc của mỗi đỉnh không lớn hơn 8

2) Với hai đỉnh không kề nhau, tồn tại ít nhất một đỉnh kề với cả hai đỉnh ấy.

Xét $\overline{G}$: xét đỉnh A bất kỳ của $\overline{G}$ và gọi $A_1, A_2, ..., A_k$ ($k \leq 8$) là tất cả các đỉnh kề với A. Nếu $k \leq 7$ thì sẽ có tối đa $7^2 = 49$ đỉnh mà mỗi đỉnh kề với ít nhất một trong các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_k$ và không kề với A. Suy ra số đỉnh của $\overline{G}$ không vượt quá $49 + 7 + 9 = 57 < 65$ trái với giả thiết. Vậy phải có $k = 8$, suy ra mỗi đỉnh của $\overline{G}$ có bậc bằng 8. Từ đây, kết hợp với 2), ta được

i) A_i, A_j không kề nhau $\forall i \neq j \in \{1, 2, ..., 8\}$

ii) Mỗi đỉnh $A_i, (i = \overline{1, 8})$, ngoài A ra sẽ kề với đúng bảy đỉnh khác và nếu kí hiệu A_{i_t} $t = \overline{1, 7})$ là bảy đỉnh ấy thì $\{A_{i_1}, ..., A_{i_7}\} \cap \{A_{j_1}, ..., A_{j_7}\} = \emptyset$ $(\forall i \notin j \in \{1, 2, ..., 8\})$.

Từ đó suy ra trong $\overline{G}$ không có chu trình đơn độ dài 3 cũng như chu trình đơn đội dài 4. Do vậy A_{i_t} và A_{i_s} không kề nhau $(\forall i = \overline{1, 8})$, $\forall t \neq s \in \{1, 2, ..., 7\}$, và do đó nếu A_{i_t} kề A_{j_s} $(i \neq j)$ thì A_{i_t} không kề A_{j_m} $m \neq s$. Từ đó suy ra có tất cả $14\binom{3}{8} = 14.7.8$ chu trình đơn độ dài 6 đi qua A.

Vì A là đỉnh bất kỳ của $\overline{G}$ nên số chu trình đơn độ dài 6 trong $\overline{G}$ là $\frac{14.7.8.65}{6} = \frac{49.8.65}{3} \notin \mathbb{Z}$. Điều vô lý. Vây không tồn tại $\overline{G}$ và do đó không tồn tại G thoả mãn đề bài.

Bài 6. Ta xét bài toán tổng quát với $x_0 > 0$ cho trước bất kỳ.

1) Với $a = 0$ hiển nhiên $x_i = 0, \forall i > 0$ dãy hội tụ.

2) Với $a > 0$ kí hiệu $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$ và $g(x) = f(f(x))$. Từ đó suy ra $f(x)$ là hàm giảm trên $(0, +\infty)$ nên $g(x)$ là hàm tăng trên $(0, \infty)$.

Xét dãy $\{x_{2n}\}$ (chỉ số chẵn). Đặt $u_n = x_{2n}$ thì $u_{n+1} = g(u_n)$. Do $g(x)$ tăng nên $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu (tăng hoặc giảm). Mặt khác, $0 < u_n < a$, nên luôn luôn tồn tại $\lim u_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = l$. Lấy giới hạn khi $n \to \infty$ có

$$g(l) = l \tag{1}$$

a) Ta chứng minh $0 < a \leq 2$ thì dãy $\{x_n\}$ có giới hạn. Thật vậy, giả sử $f(l) = v$ hay

$$a = v + vl^2 \tag{2}$$

Ta có $f(f(l)) = f(v)$ tương đương với $f(v) = g(l) = l$ hay

$$a = v + lv^2 \tag{3}$$

Trừ (2) cho (3) được $(v - l)(vl - 1) = 0$. Nếu $v \neq l$ thì $vl = 1$, thay vào (2) được $v + l = a$ suy ra $v.l$ là nghiệm của phương trình $x^2 - ax + 1 = 0$. Vì $a \leq 2$ nên $a = 2$ suy ra $v = l = 1$ trái điều giả sử. Vậy, $v = l$, tức là $f(l) = l$. Từ đó $\lim_{x\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{x\to\infty} x_{2n} = f(l) = l = \lim x_{2n}$.

Vậy $\lim_{n\to\infty} x_n$ tồn tại.

b) Ta chứng minh với $a > 2$ thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi $a = x_2^3 + x_1$. Thật vậy, giả sử $a = x_0^3 + x_0$ suy ra $x_0 = \frac{a}{1+x_0^2} = x_1$ suy ra $a = x_1^3 + x_1$ suy ra $x_2 = x_1$,.v..v... Vậy $\{x_n\}$ là dãy hằng, suy ra tồn tại $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Ngược lại, giả sử tồn tại $\lim_{n\to\infty} x_n = k$. Qua giới hạn ta được $f(k) = k$ hay $a = k^3 + k$, suy ra k là nghiệm duy nhất của $x^3 + x - a$. Ta có

$$g(x) - x = \frac{(1+x^2)^2(a-x) - a^2x}{a^2 + (1+x^2)^2} = \frac{-(x^2+x-a)(x^2-ax+1)}{a^2+(1+x^2)^2}.$$

Vì $a > 2$ nên phương trình $x^2 - ax + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, α, β. Giả sử $\alpha < \beta$, ta thấy $\alpha < k < \beta$. Thật, vậy vì $a > 2$ suy ra $k > 1$ do đó $a - ak^2 < 0$. Thay $a = k^3 + k$ vào ta được $k^3 + k - ak^2 < 0$ hay $\alpha < k < \beta$.

Dấu của $g(x) - x$ là dấu của $-(x-k)(x-\alpha)(x-\beta)$. Ta có bảng xét dấu của $g(x) - x$ như sau

x		α		k		β	
$g(x) - x$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Xét dãy $u_n = x_{2n}$ như trên thì dãy $\{u_n\}$ là đơn điệu. Vì $\lim_{n\to\infty} u_n = k$ nên $\exists n_0$ để $\alpha < u_{n_0} < \beta$. Nếu $\alpha < u_{n_0} < k$ thì $u_{n_0+1} = g(u_{n_0}) < u_{n_0}$ suy ra $\{u_n\}$ là dãy giảm và $u_{n_0} < k$, do đó nó không hội tụ về k. Tương tự nếu $k < u_{n_0} < \beta$ thì $\{u_n\}$ là dãy tăng với $u_{n_0} > k$ do đó nó không hội tụ về k. Vậy chỉ có thể $u_{n_0} = k$. Chú ý rằng nếu $\exists i$: $x_i = k$ thì suy ra $x_{i-1} = k$. Thật vậy $x_0 = k = \frac{a}{1+x_{i-1}^2}$ suy ra $k(1 + x_{i-1}^2) = a = k^2 + k$ suy ra $x_{i-1}^2 = k^2$ suy ra $x_{i-1} = k$. Thành thử $u_{n_0} = k$, do đó $u_n = k$ hay $x_0 = k$. Vì $a = k^3 + k$ nên $a = x_0^3 + x_0$. Điều phải chứng minh.

3) Với $a < 0$. Đặt $y_n = -x_n$. Khi đó

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{-a}{1 + x_n^2} = \frac{|a|}{1 + y_n^2}.$$

Vậy $\{x_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi $\{y_n\}$ hội tụ. Vì $y_n > 0$, $\forall n \geq 1$ nên theo trên với $|a| \leq 2$ thì $\{y_n\}$ hội tụ. Nếu $|a| > 2$ thì $\{y_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi $|a| = y_1^3 + y_1$. Mà từ (2.5) ta có $|a| = y_1(1 + y_0^2) = y_1(1 + x_0^2)$ suy ra $x_0 = y_1$, thành ra $|a| = x_0^3 + x_0$.

Kết luận: Dãy $\{x_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi $|a| \leq 2$ hoặc $|a| = x_0^3 + x_0 = 1997\sqrt{1996}$ khi $x_0 = \sqrt{1996}$.

2.6 Đáp án chọn đội tuyển năm học 1996 - 1997

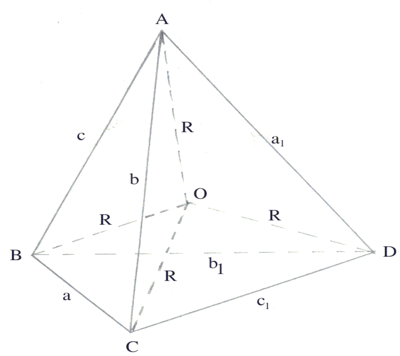
Bài 1. Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$. Điều kiện xác định điểm P là

$$PA^2 + a_1^2 + b^2 + c^2 = PB^2 + b_1^2 + c^2 + a^2 = PC^2 + c_1^2 + a^2 + b^2 = PD^2 + a^2 + b_1^2 + c_1^2.$$

Tính

$$\begin{aligned}
&PA^2 + a_1^2 + b^2 + c^2 = PA^2 + DA^2 + BA^2 + cA^2\\
&= \overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{DA}^2 + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{CA}^2\\
&= (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{CA})^2 + (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA})^2\\
&= \overrightarrow{PO}^2 + 4\overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{PO}\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OA}^2(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) +\\
&\qquad\qquad 2\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{DO}^2 + \overrightarrow{BO}^2 + \overrightarrow{OC}^2\\
&= PO^2 + 9R^2 + 2\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OE}\\
&= PO^2 + 9R^2 - 2\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OP}).
\end{aligned}$$

trong đó đặt $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ (điểm E xác định). Tính tương tự đối với $PB^2 + b_1^2 + c^2 + a^2$, $PC^2 + c_1^2 + a^2 + b^2$, $PD^2 + a_1^2 + b_2^2 + c_2^2$. thì ta được



$$\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OB}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OC}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OD}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OP})$$

Ta có $\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OB}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OP}$ hay $(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OP}) = 0$ hay $\overrightarrow{BA}(\overrightarrow{OE}^2 + \overrightarrow{OP}) = 0$. Từ đó ta có

$$\begin{cases}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OP}).\overrightarrow{BA} = 0\\ (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OP}).\overrightarrow{CA} = 0\\ (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OP}).\overrightarrow{DA} = 0\end{cases}$$

hay là $\overrightarrow{OE}^2 + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{0}$ hay $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OE}$. Vậy điểm P xác định duy nhất.

Từ $PA^2 = (\overrightarrow{PO}^2 + \overrightarrow{OA})^2 = \overrightarrow{PO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{OA} = PO^2 + R^2 + 2\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{OA}$

thì

$$\begin{aligned} PA^2+PB^2+PC^2+PD^2 &= 4PO^2+4R^2+2\overrightarrow{PO}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}) \\ &= 4PO^2+4R^2+2\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{OE} \\ &= 4PO^2+4R^2+2PO^2 \\ &= 6PO^2+4R^2 \geq 4R^2. \end{aligned}$$

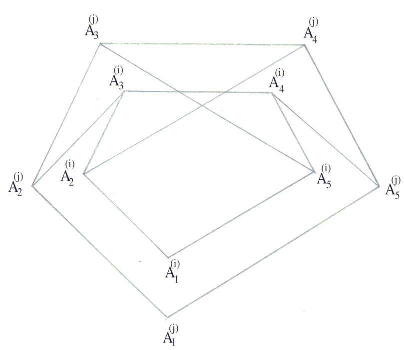
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $PO^2 = 0$ hay $P \equiv O$. Khi đó ta có

$$a_1^2+b^2+c^2 = b_1^2+c^2+a^2 = c_1^2+a^2+b^2 = a_1^2+b_1^2+c_1^2$$

hay $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c$, tức là tứ diện $ABCD$ gần đều.

Bài 2. 1) Giả sử k là số sao cho có thể thiết lập được hệ thông đường bay thoả mãn các điều kiện của đề bài. Khi đó, tổng số đường bay trực tiếp giữa hai thành phố sẽ là $\frac{25\times k}{2}$. Suy ra $k \equiv 0 \pmod 2$.

Xét một thành phố A bất kỳ. Theo giả thiết, từ A có đường bay trực tiếp đên k thành phố khác, gọi là $A_1, A_2, ..., A_k$. Mỗi thành phố A_i, $i = \overline{1,k}$, lại có đường bay trực tiếp đến $k-1$ thành phố khác, (không kể A). Hơn nữa, ta lại có: Nếu từ B đến A không có đường bay trực tiếp thì từ B phải có đường bay trực tiếp đến ít nhất một thành phố A_i. Từ những lập luận trên suy ra, số thành phố chỉ có thể tối đa là $1+k+k(k-1) = k^2+1$. Như vậy $25 \leq k^2+1$. Kết hợp với $k \equiv 0 \pmod 2$, suy ra $k \geq 6$.



2) Với $k = 6$ ta sẽ chỉ ra cách thiết lập hệ thống đường bay thoả mãn các điều kiện của đề bài. Chia 25 thành phố thành năm nhóm, mỗi nhóm gồm năm thành phố. Các thành phố của nhóm thứ i, $i = \overline{1,5}$, ta kí hiệu bởi $A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, A_3^{(i)}, A_4^{(i)}, A_5^{(i)}$. Với các thành phố trong cùng nhóm i, ta thiết lập các đường bay $A_1^{(i)}A_2^{(i)}, A_2^{(i)}A_3^{(i)}, A_3^{(i)}A_4^{(i)}$, $A_4^{(i)}A_5^{(i)}, A_5^{(i)}A_1^{(i)}$. Giữa các thành phố thuộc hai nhóm i, j bất kỳ, $i \neq j \in \{1,2,3,4,5\}$, xây dựng các đường bay sau $A_1^{(i)}A_1^{(j)}, A_2^{(i)}A_4^{(j)}, A_3^{(i)}A_2^{(j)}, A_4^{(i)}A_5^{(j)}, A_5^{(i)}A_3^{(j)}$.

Bằng cách xây dựng các đường bay như trên, ta có: Từ thành phố A bất kỳ sẽ có đường bay trực tiếp đến đúng hai thành phố, trong cùng nhóm với A và có đường bay trực tiếp đến đúng bốn thành phố khác nhóm với A. Do vậy từ mỗi thành phố sẽ có đường bay trực tiếp đến đúng sáu thành phố khác.

Hơn nữa, với A, B là hai thành phố bất kỳ mà giữa chúng không có đường bay trực tiếp ta thấy:

- Nếu A, B thuộc cùng nhóm thì dễ thấy luôn tồn tại một thành phố trong nhóm đó mà từ C có đường bay trực tiếp đến cả A và B.

- Nếu A, B không cùng nhóm thì qua hình vẽ trên dễ dàng kiểm tra được sự tồn tại của thành phố C mà từ C có đường bay trực tiếp đến cả A và B.

3) Vậy $k_{\min} = 6$.

Bài 3. Giả sử α là số thực sao cho tồn tại dãy vô hạn các số tự nhiên $\{a_n\}$ thoả mãn các điều kiện của đề bài. Dễ thấy $\alpha = 0$ là một số thực như vậy. Do đó, để tìm số α lớn nhất, dưới đây ta chỉ xét $\alpha > 0$.

Từ giả thiết về dãy $\{a_n\}$ suy ra $a_i + a_j \geq a_{i+j}^{\alpha}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}^*$. Dẫn tới

$$2a_{2^i} \geq a_{2^{i+1}}^{\alpha} \quad \forall i \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Nếu $\alpha \neq 1$ thì (1) tương đương với mỗi bất đẳng thức sau

$$a^{\frac{1}{1-\alpha}} a_{2^i} \geq (2^{\frac{1}{1-\alpha}}.a_{2^{i+1}})^{\alpha} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$
$$a^{\frac{1}{1-\alpha}} a_{2^i} \leq (2^{\frac{1}{1-\alpha}}.a_{2^i})^{1/\alpha} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

hay

$$a^{\frac{1}{1-\alpha}} a_{2^n} \leq (2^{\frac{1}{1-\alpha}}.a_{2^{n-1}})^{1/\alpha} \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$$

Suy ra $2^{\frac{1}{1-\alpha}}.a_{2^n} \leq (2^{\frac{1}{1-\alpha}} a_1)^{1/\alpha n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Mà $a_{2^n} > 1997^{2^n}$ nên $2^{\frac{1}{1-\alpha}}.1997^{2^n} < (2^{\frac{1}{1-\alpha}}.a_1)^{1/\alpha n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, hay

$$\ln 2^{\frac{1}{1-\alpha}} + 2^n \ln 1997 < \frac{1}{\alpha^n} \ln(2^{\frac{1}{1-\alpha}}.a_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

hay

$$\ln 1997 < \frac{1}{2^n.\alpha^n} \ln(2^{\frac{1}{1-\alpha}}.a_1) - \frac{1}{2^n} \ln 2^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{2}$$

Từ (2) suy ra $\alpha \leq \frac{1}{2}$, vì nếu $\alpha > \frac{1}{2}$ thì, cho $n \to \infty$, từ (2) ta được $\ln 1997 \leq 0$, vô lý.

Nếu $\alpha = 1$ thì (1) cho ta $a_{2^{i+1}} \leq 2a_{2^i}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, hay $a_{2^n} \leq 2a^{2^{n-1}}$. Suy ra $a_{2^n} \leq 2^n a_1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Mà $a_{2^n} > 1997^{2^n}$ nên $1997^{2^n} < 2^n.a_1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, hay $2^n \ln 1997 < n \ln 2 + \ln a_1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Bất đẳng thức này tương đương với

$$\ln 1997 < \frac{n}{2^n}.\ln 2 + \frac{\ln a_1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{3}$$

Cho $n \to \infty$, từ (3) ta được $\ln 1997 \leq 0$ (vô lý). Tóm lại, ta phải có $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

2) Với $\alpha = \frac{1}{2}$ ta sẽ xây dựng dãy $\{a_n\}$ thoả mãn các điều kiện của đề bài. Xét dãy $\{a_n\}$ được xác định bởi $a_1 = 2 \times 1997$, $a_2 = 4 \times 1997^2 - 2$ và $a_{n+1} = 2 \times 1997 a_n - a_{n-1}$ $\forall n \geq 2$. Dựa vào phương trình đặc trưng và các số hạng ban đầu a_1, a_2 của $\{a_n\}$ dễ dàng tìm được $a_n = p^n + q^n$ và $n \in \mathbb{N}^*$, trong đó $p = 1997 + \sqrt{1997^2 - 1}$ và $q = 1997 - \sqrt{1997^2 - 1}$. Suy ra $a_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ và

$$a_n = p^n + q^n \geq 2\left(\frac{p+q}{2}\right)^n = 2 \times 1997^n > 1997^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{4}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$u_n = a_{\left[\frac{n}{2}\right]} + a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, \quad \forall n \geq 2 \tag{5}$$

Vì $a_{\left[\frac{n}{2}\right]} + a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = n$ nên (5) tương đương với

$$\left(a_{\left[\frac{n}{2}\right]-t} + a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+t}\right) \vdots \left(a_{\left[\frac{n}{2}\right]} + a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\right) \quad \forall n \geq 2,\ t \in \{0, 1, ..., \left[\tfrac{n}{2}\right] - 1\} \tag{6}$$

Do vậy, để chứng minh (5), ta sẽ chứng minh (6).

Với $t = 0$ thì (6) hiển nhiên đúng.

Với $t = 1$, ta có: nếu $n = 2k$ thì

$$a_{\left[\frac{n}{2}\right]-1} + a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+1} = a_{k-1} + a_{k+1} = 2 \times 1997 a_k \vdots (a_k + a_k)$$

hay

$$\left(a_{\left[\frac{n}{2}\right]-1} + a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+1}\right) \vdots \left(a_{\left[\frac{n}{2}\right]} + a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\right)$$

Nếu $n = 2k + 1$ thì

$$\begin{aligned} a_{\left[\frac{n}{2}\right]-1} + a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+1} &= a_{k-1} + a_{k+2} = 2 \times 1997 a_k - a_{k+1} + 2 \times 1997 a_{k+1} - a_k \\ &= (2 \times 1997 - 1)(a_{k+1} + a_k) \vdots (a_{k+1} + a_k) \end{aligned}$$

Từ đây suy ra (6) đúng.

Giả sử ta đã có (6) đến t mà $1 \leq t \leq \left[\frac{n}{2}\right] - 1$. Ta sẽ chứng minh (6) cũng đúng với $t := t + 1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} a_{\left[\frac{n}{2}\right]-(t+1)} + a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+(t+1)} &= 2 \times 1997 a_{\left[\frac{n}{2}\right]-t} - a_{\left[\frac{n}{2}\right]-t+1} + \\ &\quad + 2 \times 1997 a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+t} - a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+t-1} \\ &= 2 \times 1997 \left(a_{\left[\frac{n}{2}\right]-t} + a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+t}\right) - \left(a_{\left[\frac{n}{2}\right]-(t-1)} + a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+(t-1)}\right) \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp thì

$$\left(a_{\left[\frac{n}{2}\right]-t}+a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+t}\right)-\left(a_{\left[\frac{n}{2}\right]-(t-1)}+a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+(t-1)}\right)\vdots\left(a_{\left[\frac{n}{2}\right]}+a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\right).$$

Theo nguyên lý quy nạp, (6) cũng đồng thời là (5), được chứng minh. Từ đó, ta có

$$\begin{aligned}u_n &= p^{\left[\frac{n}{2}\right]}+q^{\left[\frac{n}{2}\right]}+p^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}+q^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\\ &\geq 2(p^{n/2}+q^{n/2})>2(p^n+q^n)^{1/2}=2a_n^{1/2}>a_n^{1/2}.\end{aligned}$$

Từ đây và (4) cho thấy dãy $\{a_n\}$ thoả mãn các điều kiện của đề bài ứng với $\alpha=\frac{1}{2}$.

3) Vậy $\alpha_{\max}=\frac{1}{2}$.

Bài 4. Tìm công thức tổng quát của $f(n)$.

Từ

$$f(n+2)=503f(n+1)-1996f(n) \qquad (*)$$

có phương trình đặc trưng $x^2-503x+1996=0$. Phương trình này có hai nghiệm nguyên là $x_=4$ và $x_2=499$, từ đó $f(n)=4^n+499^n$.

Ta sẽ chứng minh rằng ước nguyên tố $p=p(s)$ của $f(2^s)$ có dạng $p(s)=2^{1+s}u+1$ với $u\in\mathbb{N}$.

Vì $(4,499)=1$ nên nếu

$$p(s)\mid f(2^s)=4^{2^s}+499^{2^s} \qquad (**)$$

với $s\geq 1$ thì $p(s)$ lẻ, suy ra $(4,p(s))=1$ và $(499,p(s))=1$.

Từ (**) có thể viết $4^{2^s}+499^{2^s}=tp(s)$.

Giả sử $p(s)-1=2^m v$ với v lẻ, $m\leq s$ thì có thể áp dụng định lý Fermat

$$\begin{aligned}p(s)=p &\mid (400^{2^{s-m}})^{p-1}-1=(499^{2^s})^{\frac{p-1}{2^m}}-1=(pt-4^{2^s})^{\frac{p-1}{2^m}}-1\\ &=p.k+(-4^{2^s})^{\frac{p-1}{2^m}}-1=p.k+(-1)^{\frac{p-1}{2^m}}\left\{(4^{2^{s-m}})^{p-1}-1\right\}+(-1)^{\frac{p-1}{2^m}}-1\end{aligned}$$

mà $p\mid(4^{2^{s-m}})^{p-1}-1$ nên $(-1)^{\frac{p-1}{2^m}}=1$ suy ra $v=\frac{p-1}{2^m}\vdots 2$, trái với điều giả sử. Vậy $m>s$ suy ra $p(s)=2^{1+s}.u+1$.

Đặt

$$S_k=\sum_{i=1}^{k}p(s_i)=\sum_{i=1}^{k}(2^{1+s_i}u_i+1)=\sum_{i=1}^{k}2^{1+s_i}u_i+k.$$

Với $s=\min\{s_i\mid i=1,2,...,k\}$ thì $S_k=2^{1+s}m+k,\ (s\geq k)$. Từ đó $S_k\vdots 2^t$ tương đương với $(2^{1+s},+k)\vdots 2^t$ hay $k\vdots 2^t$ (vì $t\leq k\leq s<1+s$, suy ra $2^r\mid 2^{1+s}$).

Bài 5. 1) Điều kiện để phương trình

$$4n^2x = \log_2(2n^2x+1) \tag{1}$$

có nghĩa là $x > -\frac{1}{2n^2}$. Với điều kiện đó ta có (1) tương đương với

$$2^{4n^2x} = 2n^2x + 1 \tag{2}$$

Đặt $4n^2x + 1 = t$, từ phương trình (2) ta có phương trình (ẩn t)

$$2^t = t + 1 \tag{3}$$

Với $0 < t < 1$ ta có $2^t < 2t + (1-t) = t + 1$.
Với $t < 0,\ t > 1$ ta có $2^t > 2t + (1-t) = t + 1$.
Với $t = 0,\ t = 1$ ta có $2^t = t + 1$.
Như vậy, phương trình (3) có tất cả hai nghiệm là $t = 0$ và $t = 1$. Dẫn tới phương trình (2), và cũng là (1) cũng có hai nghiệm $x_n = 0$ và $x_n = -\frac{1}{4n^2}$.

2) Với $x_n = 0$ ta có $a^{x_n} + b^{x_n} = a^0 + b^0 = 2 = 2 + 3x_n\ \forall a, b > 0$. Xét $x_n = -\frac{1}{4n^2}$. Khi đó các bất đẳng thức sau là tương đương

$$a^{x_n} + b^{x_n} \geq 2 + 3x_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
$$\frac{1}{2}(a^{-\frac{1}{4n^2}} + b^{-\frac{1}{4n^2}}) \geq 1 + \frac{3}{2}(-\frac{1}{4n^2}) \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$
$$\left(\frac{a^{-\frac{1}{4n^2}} + b^{-\frac{1}{4n^2}}}{2}\right)^{-4n^2} \leq \left\{1 + \frac{3}{2}\Big(-\frac{1}{4n^2}\Big)\right\}^{-4n^2}.$$

Cho $n \to +\infty$, từ bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{ab} \leq e^{3/2}$. Ngược lại, với $\sqrt{ab} \leq e^{3/2}$, ta có

$$\frac{1}{2}(a^{-\frac{1}{4n^2}} + b^{-\frac{1}{4n^2}}) \geq (\sqrt{ab})^{-\frac{1}{4n^2}} \geq e^{\frac{3}{2}(-\frac{1}{4n^2}} \geq 1 + \frac{3}{2}(-\frac{1}{4n^2})$$

hay $a^{x_n} + b^{x_n} \geq 2 + 3x_n$.

3) Vậy, tất cả các cặp số thực dương a, b cần tìm là $a, b > 0$ sao cho $ab \leq e^3$.

Bài 6. Trước hết, ta chứng minh khẳng định sau:

Khẳng định K. Cho n điểm phân biệt cùng nằm trên một đường thẳng. Tô n điểm đói bởi hai màu xanh, đỏ sao cho có đúng k điểm được tô bởi màu xanh, và giữa hai điểm màu xanh liên tiếp (tính từ trái qua phải) có ít nhất p điểm được tô bởi màu đỏ (tính từ trái qua phải) có ít nhất p điểm được tô bởi màu đỏ và ở bên phải điểm màu xanh cuối cùng có ít nhất p điểm được tô bởi màu đỏ và ở bên phải điểm màu xanh cuối cùng có ít nhất p điểm được tô bởi màu đó. Khi đó số cách tô màu khác nhau là $\binom{k}{n-kp}$

Chứng minh. Lần lượt từ trái trái qua phải, gọi các điểm là $1, 2, ..., n$. Đặt tương ứng mỗi cách tô màu với bộ k số nguyên dương $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$, trong đó $i_1, i_2, ..., i_k$ là các điểm được tô màu xanh. Dễ thấy, tương ứng nói trên xác lập một song ánh từ tập gồm tất cả các cách tô màu tới tập

$$T = \{(i_1 < i_2 < \cdots < i_k) \mid i_j \in \{1, 2, ..., n-p\} \ \forall i = \overline{1, k}; \\ i_{j+1} - i_j > p \ \ \forall i = \overline{1, k-1}$$

Xét ánh xạ

$$f : T \to T' = \{(j_1 < j_2 < \cdots < j_k) \mid \{1, 2, ..., n-kp\} \ \forall t = \overline{1, k}\} \\ (i_1 < i_2 < \cdots < i_k) \in T \mapsto (i_1, i_2 - p, ..., i_k - (k-1)p) \in T'$$

Dễ chứng minh được f là song ánh từ T đến T'. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

2) Trở lại bài toán. Lần lượt, theo chiều kim đồng hồ, gọi các điểm là $A_1, A_2, ..., A_n$. Gọi X là tập gồm tất cả các cách tô màu khác nhau. Xét phân hoạch

$$X = X' \cup X''$$

trong đó $X = \{x \in X \mid$ trong x có điểm màu xanh thuộc$\{A_i, ..., A_p\}\}$, $X'' = X \backslash X'$. Hiển nhiên, với $x \in X''$ thì trong x không có điểm màu xanh nào thuộc tập $\{A_1, A_2, ..., A_p\}$. Do đó, theo khẳng định K ta có card$X'' = \binom{k}{n-kp}$.

Xét X'. Kí hiệu $X'_i = \{x \in X' \mid$ trong x có điểm A_i được tô màu xanh, $i = \overline{1, p}$. Thế thì $X'_i \cap X'_j = \emptyset \ \forall i \neq j \in \{1, 2, ..., p\}$ và $X = \bigcup\limits_{i=1}^{p} X'_i$.

Với mỗi $i = \overline{1, p}$, theo khẳng định K, ta có card$X'_i = \binom{k-1}{n-1-p-(k-1)p} = \binom{k-1}{n-kp-1}$. Do đó card $X' = p\binom{k-1}{n-kp-1}$.

Vậy card$X = \binom{k}{n-kp} + p\binom{k-1}{n-kp-1}$

2.7 Đáp án chọn đội tuyển năm học 1997 - 1998

Bài 1.

Bổ đề 1. Nếu $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thoả mãn

$$|P(x)| \leq cx^{1998} \qquad \text{với } x \in \mathbb{R} \ c \text{ là hằng số} \tag{1}$$

thì $P(x) = ax^{1998}$, với a là hằng số.

Nếu $P(x) = a$ hằng số thì $P(x) = a = 0$. Giả sử $\deg p = n \geq 1$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0.$$

Khi đó (1) tương đương với

$$|a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0| \leq cx^{1998} \tag{2}$$

Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng rằng $n \leq 1998$. Thật vậy, nếu $n > 1998$ thì từ (2) ta có

$$\left| a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x_n} \right| \leq \frac{c}{x^{n-1998}}, \quad (\forall x > 0)$$

Cho $n \to \infty$, suy ra $a_n = 0$, trái với giả thiết. Vậy $n \leq 1998$.

Ta chứng minh $a_k = 0$ với $k = 0, 1, ..., n-1$ bằng quy nạp. Với $k = 1$ thì từ (2) cho $x = 0$ suy ra $a_0 = 0$ đúng với $k = 1$. Giả sử $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$ và $k < n$. Thay vào (2) được

$$|a_n x^n + \cdots + a_k x^k| \leq cx^{1998}$$

hay

$$|a_n x^{n-k} + \cdots + a_{k+1}x + a_k| \leq cx^{1998-k} \quad \forall x > 0$$

Cho $x \to \infty 0$, vì $1998 - k \geq n - k > 0$ nên vế phải tiến tới 0, suy ra $|a_k| \leq 0$ hay $a_k = 0$, đúng. Vậy $P(x) = a_n x^n$, do đó $|a_n x^n| \leq cx^{1998}$ với mọi $n \leq 1998$ và $a_n \neq 0$. Dễ thấy $n = 1998$ vì nếu trái lại thì $a_n = 0$.

Bây giờ ta chứng minh bài toán. Lấy $c = 1$, đặt $q(x) = p_1(x) \in \mathbb{R}[x]$, ta có với mọi $\epsilon > 0$ thì

$$\begin{aligned} |q(x) - p_\epsilon(x)| &= |p_1(x) - p_\epsilon(x)| \\ &\leq |f(x) - p_1(x)| + |(f(x) - p_\epsilon(x)| \\ &\leq x^{1998} + \epsilon x^{1998} \\ &= (1+\epsilon)x^{1998}. \end{aligned}$$

Do đó theo bổ đề

$$p_\epsilon(x) - q(x) = a_\epsilon x^{1998} \tag{3}$$

Lại có

$$\epsilon x^{1998} \geq |f(x) - p_\epsilon(x)| = |f(x) - q(x) - a_\epsilon x^{1998}| \tag{4}$$

Từ (4) ta có

$$|h(x) - a_\epsilon x^{1998}| \leq \epsilon x^{1998}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Cho $x = 0$, suy ra $h(0) = 0$. Từ (5) suy ra $\forall x_1 \neq 0, \ x_2 \neq 0$

$$\left|\frac{h(x_1)}{x_1^{1998}} - a_\epsilon\right| \leq \epsilon, \qquad \left|\frac{h(x_2)}{x_2^{1998}} - a_\epsilon\right| \leq \epsilon.$$

Thành thử,

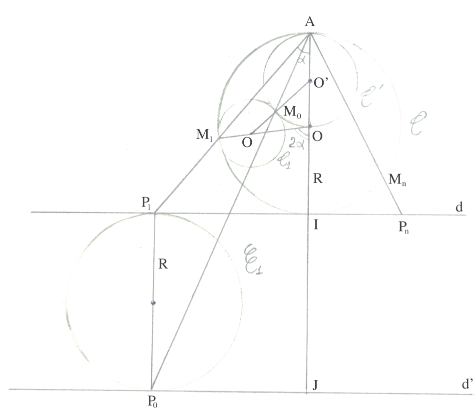
$$\left|\frac{h(x_1)}{x_1^{1998}} - \frac{h(x_2)}{x_2^{1998}}\right| \leq 2\epsilon \quad \forall x_1, x_2 \neq 0,\ \forall \epsilon > 0.$$

Cho $\epsilon \to 0$ thì $\frac{h(x_1)}{x_1^{1998}} = \frac{h(x_2)}{x_2^{1998}}$, tức là $\frac{h(x)}{x^{1998}} = c$, c là hằng số, tức là

$$h(x) = cx^{1998} \ \ \forall x \neq 0 \tag{6}$$

Vì $h(0) = 0$, suy ra $h(x) = cx^{1998}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Từ đó $f(x) = q(x) + h(x) = q(x) + cx^{1998}$ là một đa thức vì $q(x)$ là đa thức.

Bài 2. Hai đường tròn $\mathcal{C}$ và $\mathcal{C}'$ tiếp xúc nhau tại A. Phép nghịch đảo f tâm A, phương tích $AI^2 = (2R)^2$ biến đường tròn $\mathcal{C}$ thành đường thẳng d tiếp xúc với $\mathcal{C}$ tại I, biến đường tròn $\mathcal{C}'$ thành đường thẳng d' vuông góc với AI và cắt đường thẳng AI tại J, với $AO.AJ = 4R^2$, suy ra $AJ = 4R$, và do đó $IJ = 2R$. f biến mỗi đường tròn $\mathcal{C}_\rangle \in \mathsf{H}$ thành đường tròn Γ_i, $i = 1, 2, ..., n$ tiếp xúc với d và d', do đó Γ_i có bán kính $R = \frac{IJ}{2}$. $\mathcal{C}_\infty$ tiếp xúc với $\mathcal{C}$ tại M_1, suy ra $f(M_1) = P_1$ là tiếp điểm của Γ_1 và d, $P_1 = (AM_1) \cap d$.



$\mathcal{C}_\backslash$ tiếp xúc với $\mathcal{C}$ tại M_n, suy ra $f(M_n) = P_n$ là tiếp điểm của Γ_n và d. Vì có n đường tròn $\mathcal{C}_\infty, ..., \mathcal{C}_\backslash$ nên có n đường tròn $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ với $\Gamma_i = f(\mathcal{C}_\rangle)$. Suy ra $P_1P_n = (n-1)2R$. Chú ý rằng $P_1P_n = P_1I + IP_n$ hoặc $P_1P_n = IP_1 - IP_n$.

Bây giờ ta tính IP_1. Đặt $\widehat{IAM_1} = \alpha$ $\ (0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2})$ thì $IP_1 = 2R\tan\alpha$. Sử dụng định lý hàm số Cosine trong tam giác $OO'O_1$ cho ta

$$O'O_1^2 = OO'^2 + OO_1^2 - 2OO'.OO_1\cos(\pi - 2\alpha).$$

Từ đó ta có các đẳng thức tương đương sau

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{R}{2}+\frac{R}{p_1}\Big)^2 &= \frac{R^2}{4}+R^2\Big(1-\frac{1}{p_1}\Big)^2+2.\frac{R}{2}.R(1-\frac{1}{p_1})\cos 2\alpha\\
\Big(\frac{p_1+2}{2p_1}\Big)^2 &= \frac{1}{4}+\Big(\frac{p_1-1}{p_1}\Big)^2+\frac{p_1-1}{p_1}\cos 2\alpha.\\
(p_1+2)^2 &= p_1^2+4(p_1-1)^2+4p_1(p_1-1)\cos 2\alpha\\
\cos 2\alpha &= \frac{3-p_1}{p_1-1}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Đặt $\tan\alpha = t$ thì

$$\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$(3-p_1)(1+t^2) = (p_1-1)(1-t^2)$$

suy ra $\tan^2\alpha = p_1-2$. Vậy $IP_1 = 2R\sqrt{p_1-2}$. Tương tự $IP_n = 2R\sqrt{p_n-2}$. Do $IP_1 \geq 0$ và $IP_n \geq 0$ nên $p_1 \geq 2$ và $p_n \geq 2$.

Điều kiện cần. Chú ý rằng $P_1P_n = IP_1 - IP_n$. và $IP_1 = 2R\sqrt{p_1-2}$, $IP_n = 2R\sqrt{p_n-2}$ suy ra điều kiện cần và đủ để có họ $C_1, C_2, ..., C_n$ thuộc H là

$$2R\sqrt{p_1-2}+2R\sqrt{p_n-2} = (n-1)2R$$

hay

$$\sqrt{p_1-2}+\sqrt{p_n-2} = n-1 \qquad (2a)$$

khi I nằm trong $[p_1, p_n]$.

$$|2R\sqrt{p_1-2}-2R\sqrt{p_n-2}| = (n-1)2R.$$

hay

$$|\sqrt{p_1-2}-\sqrt{p_n-2}| = n-1 \qquad (2b)$$

khi I nằm ngoài (p_1, p_n).

Bình phương hai vế của (2a) và (2b) ta được

$$\pm\sqrt{(p_1-2)(p_n-2)} = (n-1)^2-(p_1-2)-(p_n-2)$$

Lại bình phương hai vế và rút gọn ta được

$$(p_1-p_n)^2 = (n-1)^2(2(p_1+p_n)-(n-1)^2-8) \qquad (3)$$

Điều kiện đủ. Giả sử ta có (3). Coi $p_1 = p$ là ẩn và p_n là tham số thì (3) tương đương với

$$p^2 - 2p((n-1)^2 + p_n) + p_n^2 - 2p_n(n-1)^2 + (n-1)^2((n-1)^2 + 8) = 0.$$

Để phương trình này có nghiệm thì $\Delta \geq 0$ hay

$$((n-1)^2 + p_n)^2 - (p_n^2 - 2p_n(n-1)^2 + (n-1)^4 + 8(n-1)^2) \geq 0.$$

Giải bất phương trình này cho ta $p_n \geq 2$, vì $n \geq 3$.

Tương tự, nếu ta coi p_n là ẩn thì suy ra $p_1 \geq 2$.

Nếu có số $p_i \geq 2$, $(i = \overline{1, n})$ thì trên tia gốc I của đường thẳng d có điểm P_i để $IP_i = 2\sqrt{p_i - 2}$. Xét dãy đường tròn $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ lần lượt tiếp xúc ngoài với nhau và tiếp xúc với cả hai đường thẳng d, d'. Phép nghịch đảo tâm A, phương tích $4R^2$ biến dãy đường tròn $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ thành dãy đường tròn $\mathcal{C}_\infty, \mathcal{C}_\in, ..., \mathcal{C}_\backslash$ lần lượt tiếp xúc nhau và tiếp xúc với hai đường tròn $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$.

Bài 3. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với mỗi bất đẳng thức sau

$$\exp\Big\{\sum_{i=1}^{k}\Big(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2}\Big)\Big\} \geq \ln m.$$

$$\prod_{i=1}^{k} e^{\left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2}\right)} > \ln m.$$

Để chứng minh bất đẳng thức trên ta sử dụng các bổ đề

Bổ đề 1. Chứng minh rằng nếu $0 < x \leq \frac{1}{2}$ thì

$$e^{x+x^2} > \frac{1}{1-x}$$

Ta viết bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng $(1-x)e^{x+x^2} > 1$. Xét hàm số $f(x) = (1-x)e^{x+x^2}$ trên $[0, \frac{1}{2}]$. Ta có $f(0) = 1$, và tính đạo hàm $f'(x) = xe^{x+x^2}(1-2x)$. Dễ thấy rằng $f'(x) > -$ với mọi $0 < x \leq \frac{1}{2}$. Từ đó ta có

$$f(x) > f(0) = 1.$$

Từ bổ đề 1 suy ra

$$e^{\dfrac{1}{p_i} + \dfrac{1}{p_i^2}} > \Big(1 - \frac{1}{p_i}\Big)^{-1}.$$

hay là

$$\prod_{i=1}^{k} e^{\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}} > \prod_{i=1}^{k}\Big(1-\frac{1}{p_i}\Big)^{-1}.$$

Bổ đề 2. Chứng minh bất đẳng thức, $m, n, k \in \mathbb{N}$

$$\prod_{i=1}^{k}\Big(1-\frac{1}{p_i}\Big)^{-1} > \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}.$$

Dễ thấy

$$\Big(1-\frac{1}{p_i}\Big)^{-1} > 1+\frac{1}{p_i}+\cdots+\frac{1}{p_i^s}, \quad \forall s \in \mathbb{N}.$$

Giả sử $s \in \mathbb{N}$ thoả mãn $2^s \leq n < 2^{s+1}$. Khi đó

$$\begin{aligned} A = \prod_{i=1}^{k}\Big(1-\frac{1}{p_i}\Big)^{-1} &> \prod_{i=1}^{k}\Big(1+\frac{1}{p_i}+\cdots+\frac{1}{p_i^s}\Big) \\ &= \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}}, \end{aligned}$$

trong đó $0 \leq \alpha_i \leq s$. Tổng chạy trên tất cả các bộ $(\alpha_1, ..., \alpha_s)$ với $0 \leq \alpha_i \leq s$.

Mặt khác với mỗi $m \leq n$, ta có

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k} \ \text{ với } \alpha_i \geq 0$$

mà $2^{s+1} > n \geq m > p_i^{\alpha_i} \geq 2^{\alpha_i}$. Do đó $\alpha_i < s+1$ suy ra $\alpha_i \leq s \ \forall i$.

Vậy $\frac{1}{m}$ là một số hạng của tổng A. Vậy

$$\sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}} > \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}.$$

Bài toán được chứng minh nếu ta chứng minh được rằng

Bổ đề 3.

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} > \ln n.$$

Thật vậy,

$$\int_m^{m+1}\frac{dx}{x} < \int_m^{m+1}\frac{dx}{i} = \frac{1}{m} \ \ \forall m = 1, 2, ...$$

Suy ra

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} > \sum_{m=1}^{n} \int_{m}^{m+1} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(1+n) > \ln n.$$

Bây giờ chứng minh

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} > \ln(n+1).$$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ và dãy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tăng nên $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e\ \forall n \geq 1$. Suy ra $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$ hay

$$\frac{1}{n} > \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad \forall n \geq 1.$$

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} > \ln 2+\ln(1+\frac{1}{2})+\ln(1+\frac{1}{3})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})$$
$$= \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln\frac{2.3.4.n(n+1)}{1.2.3...n} = \ln(n+1).$$

Bài 4. Rõ ràng đa thức bậc 0, $P(x) = 1$ và đa thức bậc nhất không có tính chất trên. Xét đa thức

$$P(x) = x^n + \cdots + a_1x + a_0$$

với $a_i \in \mathbb{Z}$, $n > 1$. Ta chứng minh $P(x)$ luôn có tính chất đã nêu.

Ký hiệu

$$A = \{p \in P : P > P(1) - P(0),\ P > -P(0)\}$$

Khi đó $|A| = \infty$ với mọi $p \in A$, xét đa thức

$$Q_o(x) = P(x) - P(0) - p$$

Vì $\lim_{x\to\infty} Q_p(x) = +\infty$, $Q_p(1) = P(1) - P(0) - p < 0$ nên $\exists x_p \in \mathbb{R}$, $x_p > 1$ để $Q(x_p) = 0$ hay

$$P(x_p) = P(0) + p \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in A.$$

Có hai trường hợp sau

1) Nếu tồn tại vô số $p \in A$ để $x_p \notin Q$ thì bài toán được chứng minh. (Vì nếu $p_1 \neq p_2 \in A$ thì $P(x_{p_1}) \neq P(x_{p_2})$ do đó $x_{p_1} \neq x_{p_2}$).

2) Nếu chỉ có hữu hạn $p \in A$ để $x_p \notin Q$ thì tồn tại p_0 để $x_p \in Q,\ \forall p \geq p_0$, $p \in A$. Khi đó x_p là nghiệm hữu tỉ của $Q_p(x) \to x_p \in \mathbb{Z}$ và $x_p \mid Q_p(0) = -p$. Mà $x_p > 1$ nên $x_p = p$. Vậy $\forall p \geq p_0,\ p \in A:\ Q_p(p) = 0$ hay $P(p) = P(o) + p$ hay $P(x) = P(0) + x$, mâu thuẫn vì $\deg P > 2$.

Bài 5. *Điều kiện cần.* Giả sử $d = 2x^2 + 2xy + 3y^2$. Đặt $N = 5 + 1998^{1998}$ Vì N lẻ, N không chia hết cho 5 nên d lẻ và d không chia hết cho 5. Ta có $d = 2x(x+y) + 3y^2$. d lẻ, suy ra y lẻ. Nếu x chẵn thì $2x(x+y) \vdots 4$. Nếu x lẻ thì $2x(x+y) \vdots 4$.

Vậy luôn có $d \equiv 3y^2 \equiv 3 \pmod 4$. Lại có $d = 2x^2 + 2xy + 3y^2$ suy ra $2d = (2x+y)^2 + 5y^2$ do đó $2d \equiv (2x+y)^2 \pmod 5$. Dẫn đến $2d \equiv \{0, \pm 1\}$ (mod 5) suy ra $4d \equiv \pm 2 \pmod 5$ do đó $d \equiv \pm 2 \pmod 5$.

Nếu

$$\begin{cases} d \equiv 2 \pmod 5 \\ d \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} d \equiv 7 \pmod 5 \\ d \equiv 7 \pmod 4 \end{cases}$$

thì $d \equiv 7 \pmod{20}$.

Nếu

$$\begin{cases} d \equiv 3 \pmod 5 \\ d \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

thì $d \equiv 3 \pmod{20}$.

Điều kiện đủ. Kí hiệu 1998^{999}. Khi đó $N = a^2 + 5$. Xét tập

$$A = \{ax + y\},\ \ x = 0, 1, 2, ..., [\sqrt{d}],\ y = 0, 1, 2, ..., [\sqrt{d}]$$

Đặt $q = [\sqrt{d}]$, ta có

$$q \leq \sqrt{d} < q + 1.$$

Vì $|A| = (q+1)^2 > d$ nên $\exists (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ với $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ để

$$ax_1 + y \equiv ax_2 + y_2 \pmod d$$

suy ra $a(x_1 - x_2) + y_1 - y_2 \equiv 0 \pmod d$. Đặt $x_0 = x_1 - x_2,\ y_0 = y_1 - y_2$ thì

$$ax_0 + y_0 \equiv 0 \pmod d.$$

Do đó $a^2x_0^2 - y_0^2 = (ax_0 + y_0)(ax_0 - y_0) \equiv 0 \pmod d$. Mà $a^2 \equiv -5$ (mod d), suy ra, $-5x_0^2 - y_0^2 \equiv 0 \pmod d$, hay

$$5x_0^2 + y_0^2 \vdots d \tag{1}$$

Lại có $|x_0| = |x_1 - x_2| \leq q \leq \sqrt{d}$, $|y_0| = |y_1 - y_2| \leq q \leq \sqrt{d}$. Do đó $x_0^2 \leq d,\ y_0^2 \leq d$. Vậy
$$5x_0^2 + y_0^2 \leq 6d \tag{2}$$
Từ (1) và (2) suy ra
$$5x_0^2 + y_0^2 = kd \ \text{ với } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$
Ta chứng minh rằng không xảy ra $k = 0, 1, 4, 5, 6$.

Thậy vậy,

Nếu $5x_0^2 + y_0^2 = 0$ thì $x_0 = y_0 = 0$ suy ra $x_1 = x_2$ và $y_1 = y_2$, loại.

Nếu $5x_0^2 + y_0^2 = d$ thì $y_o^2 \equiv d \pmod 4$ dẫn đến $y_0^2 \equiv \pm 2 \pmod 5$, loại.

Nếu $5x_0^2 + y_0^2 = 4d$ thì $y_0^2 \equiv 4d \pmod 5$, dẫn đến $y_0^2 \equiv -d \pmod 5$ và $y_0^2 \equiv \pm 2 \pmod 5$, loại.

Nếu $5x_0^2 + y_0^2 = 5d$ thì $y_0 = 5y_1$, do vậy $5x_0^2 + 25y_1^2 = 5d$ suy ra $x_0^2 + 5y_1^2 = d$ hay $x_0^2 \equiv d \equiv \pm 2 \pmod 5$ loại.

Nếu $5x_0^2 + y_0^2 = 6d$ thì $y_0^2 \equiv 6d \pmod 5$ suy ra $y_0^2 \equiv d \pmod 5$ hoặc $y_0^2 \equiv \pm 2$ (loại)

Vậy chỉ xảy ra
$$\left[\begin{array}{l} 5x_0^2 + y_0^2 = 2d \\ 5x_0^2 + y_0^2 = 3d \end{array}\right.$$
Nếu $5x_0^2 + y_0^2 = 2d$ suy ra $x_0^2 + y_0^2 \equiv 2d \pmod 4$. Vì $d \equiv 3 \pmod 4$ suy ra $x_0^2 + y_0^2 \equiv 2 \pmod 4$ nên x_0, y_0 phải cùng lẻ. Đặt $y_0 - x_0 = 2y$ ta có $y_0 = x_0 + 2y$ suy ra
$$\begin{aligned} & 5x_0^2 + y_0^2 = 5x_0^2 + (x_0 + 2y)^2 = 2d \\ \to\ & 6x_0^2 + 4x_0y + 4y^2 = 2d \\ \to\ & 3x_0^2 + 2x_0y + 2y^2 = d \\ \to\ & d = 2y^2 + 2yx_0 + 3x_0^2 \quad \text{biểu diễn được} \end{aligned}$$
Nếu $5x_0^2 + y_0^2 = 3d$ suy ra $y_0^2 - x_0^2 \equiv 0 \pmod 3$ hay $(y_0 - x_0)(y_0 + x_0) \vdots 3$

Nếu $y_0 + x_0 \vdots 3$ suy ra $x_0 + y_0 = 3y$ hay
$$\begin{aligned} y_0 = 3y - x_0 \to\ & 5x_0^2 + y_0^2 = 5x_0^2 + (3y - x_0)^2 = 6x_0^2 - 6yx_0 + 9y_0^2 = 3d \\ \to\ & 2x_0^2 - 2yx_0 + 3y_0^2 = d \\ \to\ & 2x_0^2 + 2(-y)x_0 + 3(-y)^2 = d \quad \text{biểu diễn được} \end{aligned}$$
Nếu $y_0 - x_0 = 3y$ suy ra $y_0 = x_0 + 3y$ khi đó ta có
$$\begin{aligned} & 5x_0^2 + y_0^2 = 5x_0^2 + (x_0 + 3y)^2 = 6x_0^2 + 6x_0y + 9y^2 = 3d \\ \to\ & d = 2x_0^2 + 2x_0y + 3y^2 \end{aligned}$$

Điều phải chứng minh.

Bài 6. Chuyển bài toán sang ngôn ngữ Graph, trong đó mỗi người coi là một điểm trên mặt phẳng, còn quan hệ quen nhau coi là một cạnh (1 đoạn thẳng với giả thiết rằng các đoạn thẳng này không cắt nhau trừ hai điểm đâu mút), ta có graph G đơn, vô hướng với tập đỉnh gồm n điểm $P = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ và bậc của đỉnh A bất kỳ là $d(A) \geq \left[\frac{n+2}{3}\right]$.

Điều kiện "hai người bất kỳ quen nhau hoặc quen nhau gián tiếp" chứng tỏ Graph G là liên thông.

Trong G (hữu hạn) xét đường gấp khúc nhiều cạnh nhất P_0, giả sử P_0 có k đỉnh là $P_0 = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ với A_iA_{i+1} $(i = 1, 2, \dots, k-1)$ là các cạnh (A_i kề với A_{i+1}).

Do điều kiện (3) thì $k \leq n - 1$.

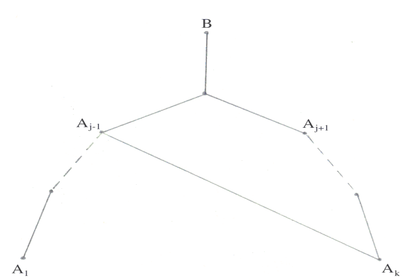
Gọi $N(A)$ là tập các đỉnh kề với đỉnh A. Ta có

$$N(A_1) \subset \{A_2, \dots, A_k\} \text{ và } N(A_k) \subset \{A_1, \dots, A_{k-1}\}$$

vì trái lại thì tồn tại đường gấp khúc khác có nhiều cạnh hơn P_0.

Giả sử $N(A_i) = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_s}\}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ký hiệu

$$N(A_i)^+ = \{A_{i_1+1}, A_{i_2+1}, \dots, A_{i_s+1}\}$$
$$N(A_i)^- = \{A_{i_1-1}, A_{i_2-1}, \dots, A_{i_s-1}\}$$



Do $k \leq n-1$ nên tồn tại đỉnh $B \notin P_0$. Ta có $N(B) \cap N(A_k)^+ = \emptyset$

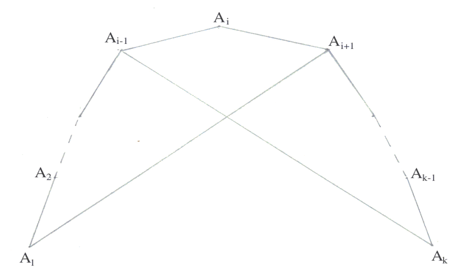
Thật vậy nếu $\exists A_j \in N(B) \cap N(A_k)^+$ thì tồn tại đường gấp khúc $(A_1, \dots, A_{j-1}, A_k, A_{k-1}, \dots, A_{j+1}, A_j, B)$ có $k+1$ cạnh, trái giả thiết đối với P_0. Lập luận tương tự có $N(B) \cap N(A_1)^- = \emptyset$. Ta cũng có $N(A_1)^- \cap N(A_k)^+ \neq \emptyset$ vì nếu trái lại thì

$$|N(B) \cup N(A_1)^- \cup N(A_k)^+| = |N(B)| + |B(A_1)^-| + |N(A_k)^+| \geq$$
$$\geq 3\left[\frac{n+2}{3}\right] > 3\left(\frac{n+2}{3} - 1\right) = n - 1$$

suy ra số đỉnh của tập hợp này lớn hơn hoặc bằng n mà tập hợp đó không chứa đỉnh B. Mâu thuẫn.

Vậy $\exists A_i \in N(A_1)^- \cap N(A_k)^+$

Khi đó tồn tại đường gấp khúc khép kín có $k-1$ đỉnh thuộc tập $P_c \backslash \{A_i\}$ là $(A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_k, A_{k-1}, \ldots, A_{i+1})$



Tập còn lại chứa các đỉnh đôi một không kề nhau (không có đoạn thẳng nối chúng) vì nếu trái lại, chẳng hạn có $B_1, B_2 \notin P_0 \backslash \{A_i\}$ mà B_1 kề với B_2 do tính liên thông tồn tại đường gấp khúc chứa B_1, B_2 và $P_0 \backslash \{A_i\}$ có nhiều cạnh hơn P_0, mâu thuẫn.

2.8 Đáp án chọn đội tuyển năm học 2001 - 2002

Bài 1. Trước hết ta chứng minh H thuộc tia MB. Thật vậy, giả sử ngược lại H thuộc tia MC (xem hình 1). Khi đó gọi K là trung điểm của AB ta có $BK = KH = AB/2 = HM$ và $KM//AC$. Suy ra: $\widehat{M_1} = \widehat{K_1} = (180^0 - \widehat{B})/2$ và $\widehat{M_2} = \widehat{C}$. Do đó:

$$180^0 = \widehat{M_1} + \widehat{M_2} = (180^0 - \widehat{B})/2 + \widehat{C}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{C} = 90^0 + (\widehat{B})/2$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\widehat{C}$ là góc nhọn. Vì vậy ta có điều phải chứng minh.

Gọi A_1 và H_1 tương ứng là điểm đối xứng với A và H qua trung trực của BC. (Xem hình 2). Ta có:

$$AA_1 = HH_1 = 2HM = AB = A_1C \Rightarrow \quad \widehat{A_1CA} = \widehat{A_1AC} = \widehat{ACB}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{ABC} = \widehat{BCA_1} = 2\widehat{ACB}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{A_1AN} = (\widehat{BAC})/3 + \widehat{A_1AC} = (180^0 - 3\widehat{ACB})/3 + \widehat{ACB} = 60^0$$

Suy ra $\triangle ANA_1$ là tam giác đều $\Rightarrow$ $NA = NA_1 = AA_1 = AB = NP \Rightarrow N$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle APA_1 \Rightarrow \widehat{APA_1} = (\widehat{ANA_1})/2 = 30^0 \Rightarrow (\widehat{BAC})/3 = \widehat{PAN} = \widehat{NPA} = (\widehat{APA_1})/2 = 15^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 45^0 \Rightarrow \widehat{ACB} = 45^0$ và $\widehat{ABC} = 90^0$. Như vậy, $\triangle ABC$ là tam giác vuông cân tại B.

Ngược lại, dễ thấy $\triangle ABC$ vuông cân tại B thoả mãn tất cả các yêu cầu của đề bài.

Tóm lại, tất cả các tam giác ABC phải tìm là các tam giác vuông cân tại B.

Bài 2. Trước hết ta nhận xét rằng, với mỗi giá trị N_0 cho trước thì hoặc người A hoặc người B sẽ có chiến lược thắng cuộc.

Xét hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \{0, 1\}$ xác định như sau:

$f(n) = 1$ nếu người A có chiến lược thắng cuộc khi số ghi ở thời điểm ban đầu là n.

$f(n) = 0$ nếu người B có chiến lược thắng cuộc khi số ghi ở thời điểm ban đầu là n.

Dễ thấy: $f(1) = f(2) = 1, f(3) = 0$ và với mỗi $n \geq 3$ ta có:

+) Nếu $f(n-1) = 0$ hoặc $f([n/3]) = 0$ thì $f(n) = 1$

+) Nếu $f(n-1) = 1$ và $f([n/3]) = 1$ thì $f(n) = 0$

Suy ra: $f(1) = f(2) = 1, f(3) = 0$ và

$$f(n) = 1 - f(n-1)f([n/3]) \quad \forall n \geq 3 \tag{1}$$

Từ đó với mọi $k \geq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} f(3k) &= 1 - f(3k-1)f(k) \\ f(3k+1) &= 1 - f(3k)f(k) = 1 - (1 - f(3k-1)f(k))f(k) \\ &= 1 - f(k) + f(3k-1)f(k) \end{aligned}$$

Cộng vế theo vế hai đẳng thức trên ta được:

$$f(3k) + f(3k+1) + f(k) = 2 \quad \forall k \geq 1 \tag{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được:

$$f(3k+1) + f(3k+2) + f(k) = 2 \quad \forall k \geq 1 \tag{3}$$

Từ đó suy ra: $f(3k+2) = f(3k) \quad \forall k \geq 1$ Hơn nữa, từ (1),(2) và (3) ta còn có: $\forall k \geq 1$ nếu $f(k) = 0$ thì $f(k+1) = 1$ và $f(3k) = f(3k+1) = f(3k+2) = 1$. Suy ra, nếu $f(k) = 0$ thì $f(3k+3) = 0$. Từ đây, vì $f(3) = 0$ nên $f((3^k - 3)/2 = 0 \quad \forall k \geq 2$. Do đó:

$$\begin{aligned} &f(120) = f((3^5 - 3)/2) = 0 \\ &f((3^{2002} - 1)/2 = 1 - f((3^{2002} - 3)/2)f([(3^{2002} - 1)/6]) = 1 \\ &f((3^{2002} + 1)/2) = f(2 + (3^{2002} - 3)/2 = f((3^{2002} - 3)/2) = 0 \end{aligned}$$

Vậy:

Nếu $N_0 = 120$ thì người B có chiến lược thắng cuộc.

Nếu $N_0 = (3^{2002} - 1)/2$ thì người A có chiến lược thắng cuộc.

Nếu $N_0 = (3^{2002} + 1)/2$ thì người B có chiến lược thắng cuộc.

Bài 3. Dễ thấy, nếu gọi p là ước nguyên tố lớn hơn $\sqrt{2m}+1$ của m thì p là duy nhất và

$$p > 3 \tag{*}$$

Xét số nguyên dương M mà đối với nó tồn tại tập $T = \{x_1 = m, x_2; \ldots; x_k = M\}$ thoả mãn các điều kiện của đề bài. Ta sẽ chứng minh: $M \geq m + p$.

Thật vậy, vì $p > \sqrt{2m} + 1$ nên p có số mũ 1 trong phân tích chuẩn của m. Do đó từ giả thiết tích $x_1 x_2 \ldots x + k$ là số chính phương suy ra trong các số $x_2, \ldots, x_k$ phải có ít nhất 1 số là bội của p. Vì vậy $M = x_k \geq m + p$.

Với $M = m + p$, xét tập $T = \{m; (m/p)(p+1); ((2m+p)/2p)(p-1); ((2m+p)/2p)(p+1); ((m+p)/p)(p_1); m+p\}$. Từ (*) dễ dàng chứng minh được:

+) Tất cả các số thuộc T đều là số nguyên dương.

+) $m < (m/p)(p+1), ((2m+p/2p)(p-1), ((2m+p)/2p)(p+1), ((m+p)/p)(p-1) < m+p$

+) Tích tất cả các số thuộc T là số chính phương.

Hơn nữa, nếu trong bốn số $(m/p)(p+1), ((2m+p)/2p)(p-1), ((2m+p)/2p)(p+1), ((m+p)/p)(p-1)$ có hai số trùng nhau thì khi bỏ hai số đó ra khỏi tập T ta sẽ nhận được tập T_1 có đầy đủ các tính chất nêu trên.

Các lập luận nêu trên chứng tỏ với $M = m + p$ tồn tại tập T thoả mãn tất cả các điều kiện của đề bài.

Vậy, số nguyên dương M nhỏ nhất cần tìm là $m + p$, trong đó p là ước nguyên tố lớn hơn $\sqrt{2m} + 1$ của m.

Bài 4. Xét số k bất kỳ thoả mãn điều kiện của đề bài. Với mỗi bộ $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ mà

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \tag{*}$$

Ký hiệu $M(i_1, \ldots, i_k)$ là số cột chỉ gồm các ô được đánh dấu của bảng $k \times 2n$ tạo nên từ k hàng $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Đặt:

$$M = \sum M(i_1, \ldots, i_k) \tag{1}$$

ở đây tổng lấy theo tất cả các bộ $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ thoả mãn (*).

Với mỗi $i \in \{1, 2, \ldots, 2n$, gọi m_i là số hàng (của bảng $n \times 2n$) có ô thứ i được đánh dấu và gọi s_i là số bảng $k \times 2n$ có cột thứ i chỉ gồm các ô được đánh dấu. Ta có:

$$s_i = C_m \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}, \quad \sum_{i=1}^{2n} m_i = n^2$$

và

$$M = \sum_{i=1}^{2n} s_i = \sum_{i=1}^{2n} C_m \geq \sum_{i=1}^{2n} (m_i - k + 1) = n^2 - 2kn + 2n = n(n - 2k + 2) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra tồn tại $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ sao cho:

$$M(i_1, i_2, \ldots, i_k) \geq (n(n - 2k + 2))/C_n = \frac{k!(n - 2k + 2)}{(n - k + 1)(n - k + 2) \ldots (n - 1)}$$

(Đpcm)

Bài 5. Yêu cầu của bài ra tương đương với việc tìm tất cả các cặp đa thức $P(x), H(x) \in Z[x]$ sao cho:

$$(H(x))^2 - (x^2 + 6x + 10)(P(x))^2 = -1 \quad (1)$$

Nhận thấy, nếu cặp đa thức (P, H) thoả mãn (1) thì các cặp đa thức $(-P, H)$, $(P, -H), (-P, -H)$ cũng thoả mãn (1). Vì vậy ta chỉ cần xét các cặp đa thức (P, H) với P, H thuộc tập hợp $Z^+[x]$ các đa thức có hệ số cao nhất là số nguyên dương.

Đặt $\sqrt{x^2 + 6x + 10} = \alpha$. Từ tính bất khả quy của tam thức $f(x) = x^2 + 6x + 10$ ta có thể dễ dàng chứng minh, bằng phương pháp phản chứng, rằng α không thể biểu diễn dưới dạng $A(x)/B(x)$, trong đó $A(x)$ và $B(x)$ là các đa thức với hệ số thực. Từ đó suy ra với mỗi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại duy nhất cặp đa thức $M(x), T(x) \in Z[x]$ sao cho:

$$(x + 3 + \alpha)^{2n+1} = M(x) + \alpha T(x)$$

Tiếp theo ta có các nhận xét sau:

Nhận xét 1: Nếu $M(x), T(x) \in Z[x]$ và

$$(x + 3 + \alpha)^{2n+1} = M(x) + \alpha T(x), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

thì $(M(x))^2 - (x^2 + 6x + 10)(T(x))^2 = -1$.

Chứng minh. Với $n \in \mathbb{N}$, từ tính duy nhất của biểu diễn (2) ta có

$$(x + 2 - \alpha)^{2n+1} = M(x) - \alpha T(x) \quad (3)$$

Nhân (2) với (3) vế theo vế, ta được điều cần chứng minh.

Nhận xét 2: Nếu đa thức hằng $S(x)$ và đa thức $G(x) \in Z^+[x]$ thoả mãn hệ thức

$$(G(x))^2 - (x^2 + 6x + 10)(S(x))^2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

thì $S(x) = 0$ và $G(x) = 1$.

Chứng minh. Dễ thấy phải có $degG \leq 1$. Từ đây dễ dàng suy ra điều cần chứng minh.

Nhận xét 3: Nếu $P(x), H(x) \in Z^+[x]$ thoả mãn (1) thì tồn tại số tự nhiên n sao cho $P(x) = T(x)$ và $H(x) = M(x)$, trong đó $M(x)$ và $T(x)$ được xác định theo (2).

Chứng minh. Dễ thấy tồn tại số tự nhiên n sao cho

$$degT \leq degP < degT^* \tag{*}$$

trong đó $T^*(x)$ là đa thức được xác định theo (2) ứng với $n+1$. Xét các đa thức $H^*(x)$ và $P^*(x)$ xác định bởi:

$$(H(x) + \alpha P(x))(M(x) - \alpha T(x)) = H^*(x) + \alpha P^*(x)$$

Ta có: $(H(x))^2 - (x^2 + 6x + 10)(P^*(x))^2 = 1$.

Mặt khác, lại có:

$$P^*(x) = P(x)M(x) - H(x)T(x) = [(T(x))^2 - (P(x))^2]/[P(x)M(x) + H(x)T(x)] \tag{4}$$

Vì $degT = 2n$ và $degT^* = 2n+2$ nên từ (*) ta thấy có thể xảy ra hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $degP = degT = 2n$. Khi đó $deg[(T(x))^2 - (P(x))^2] \leq 4n$ và $deg[P(x)M(x) + H(x)T(x)] = 4n + 1$. Vì vậy (4) tương đương với

$$(T(x))^2 - (P(x))^2 = 0 \quad \text{và} \quad P^*(x) = 0.$$

Trường hợp 2: $degP = degT + 1 = 2n + 1$.$deg[(T(x))^2 - (P(x))^2] = 4n + 2$ và $deg[P(x)M(x) + H(x)T(x)] = 4n + 2$. Vì thế từ (5.4) suy ra $P^*(x)$ là đa thức hằng. Do đó, theo nhận xét 2, ta phải có $P^*(x) = 0$ và $(T(x))^2 - (P(x))^2 = 0$. Suy ra $degP = degT$, trái với giả thiết ban đầu. Mâu thuẫn nhận được cho thấy trường hợp này không thể xảy ra.

Nhận xét 3 được chứng minh.

Từ ba nhận xét nêu trên suy ra tất cả các đa thức $P(x)$ cần tìm theo yêu cầu của đề ra:

$$P(x) = \pm((x + 3 + \alpha)^{2n+1} - (x + 3 - \alpha)^{2n+1})/2\alpha$$

Bài 6. Với mỗi tập hữu hạn T các số nguyên dương đặt:

$$D(T) = \prod t - \sum t^2$$

trong đó tích và tổng lấy theo tất cả các số t thuộc T.

Xét tập $A_0 = \{1, 2, 4, \ldots, 2^{2002}\}$. Dễ thấy $\max A_0 < \prod a - 1$ (tích lấy theo tất cả $a \in A_0$) và $D(A_0) > 0$. Xây dựng tập $A_1 = A_0 \cup \{\prod a - 1\}$. Ta có $|A_1| = |A_0| + 1$ và

$$D(A_1) = \prod a - \sum a^2 = \prod a(\prod a - 1) - (\sum a^2 + (\prod a - 1)^2) = D(A_0) - 1 > 0$$

Trên cơ sở tập A_1 ta xây dựng tập A_2 theo các xây dựng A_1 trên cơ sở A_0. Quá trình xây dựng trên được tiếp tục một khi ta còn nhận được tập A_i có $D(A_i) > 0$. Vì sau mỗi lần xây dựng số phần tử của A_i tăng 1 và $D(A_i)$ giảm 1 nên tồn tại k sao cho $|A_k| > 2002$ và $D(A_k) = 0$. Giả sử $A_k = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_m\}$. Khi đó a_m sẽ là nghiệm nguyên dương của tam thức với hệ số nguyên:

$$f(X) = X^2 - \Big(\prod_{i=1}^{m-1} a_i\Big)X + \sum_{i=1}^{m-1} a^2$$

Từ đó suy ra biệt thức $\triangle$ của f phải là số chính phương và ta có điều phải chứng minh.

2.9 Đáp án chọn đội tuyển năm học 2003 - 2004

Bài 1. Xét tập hợp

$$S_0 = \{p_1, p_2, ..., p_{1001}, p_{1002}, p_1.p_{1003}, p_2.p_{1004}, ..., p_{1001}.p_{2003}, p_{1002}.p_{2004}\}$$

trong đó $p_1, p_2, ..., p_{2003}, p_{2004}$ là 2004 số nguyên tố phân biệt lớn hơn 1.

Dễ thấy tập S_0 nêu trên có các tính chất như đề bài yêu cầu. Hơn nữa, rõ ràng trong 1002-tập con $\{p_1, p_2, ..., p_{1001}, p_{1002}\}$ của S_0 không có hai số nào mà ước chung lớn nhất của cúng khác 1. Suy ra $k \geq 1003$.

Xét một tập S tuỳ ý thoả mãn các yêu cầu của đề bài. Với mỗi số $s \in S$, ký hiệu $g(s)$ là số các số thuộc S không nguyên tố cùng nhau với s. Từ các giả thiết của bài toán suy ra $g(s) \geq 1$ và $g(s) = g(t)$ với mọi $s, t \in S$. Nghĩa là $g(s) = m$ $\forall s \in S$, trong đó m là một hằng số nguyên dương.

Xét một 1003-tập con T tuỳ ý của S. Ta sẽ chứng minh rằng trong T tồn tại hai số phân biệt mà ước số chung lớn nhất của chúng khác 1.

Thật vậy, giả sử ngược lại rằng trong T không có hai số nào mà ước số chung lớn nhất của chúng khác 1. Khi đó, kí hiệu

$$A = \{a \in S \mid \exists t \in T, (a, t) \neq 1\}$$

ta có $A \cap T = \emptyset$. Và vì thế

$$|A| \leq 2004 - 1003 = 1001 \tag{1}$$

Mặt khác, do số số thuộc S (kể cả lặp) mà mỗi số đều không nguyên tố cùng nhau với ít nhất một số thuộc T là $1003m$ và mỗi số bị tính lặp tối đa m lần, nên

$$|A| \geq \frac{1003.m}{m} = 1003 \tag{2}$$

Mâu thuẫn giữa (1) và (2) chứng tỏ điều giả sử ở trên là sai. Vì thế, ta có điều muốn chứng minh.

Tóm lại, từ các chứng minh trên ta được $k_{\min} = 1003$.

Bài 2. i) Dễ thấy, nếu $\alpha = 0$ thì các hàm số $f(x) \equiv 0$ và $f(x) \equiv 1$ là các hàm số thoả mãn các điều kiện của đề bài. Vì thế $\alpha = 0$ không phải là giá trị cần tìm.

ii) Xét $\alpha \neq 0$.

Thay $x = 0$ vào hệ thức của đề bài

$$f(x^2 + y + f(y)) = (f(x))^2 + \alpha y \tag{1}$$

ta được

$$f(x + f(y)) = (f(0))^2 + \alpha y \ \ \forall y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Từ đó suy ra f là toàn ánh từ $\mathbb{R}$ lên $\mathbb{R}$. Do đó, tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) = 0$. Thay $y = 0$ vào (1), ta được

$$f(x^2 + f(0)) = (f(x))^2 \ \ \forall y \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Lần lượt thay $x = x_0$ và $x = -x_0$ vào (3), ta được

$$0 = f(x_0^2 + f(0)) = (f(-x_0))^2.$$

Từ đây suy ra $f(-x_0) = 0$. Từ đó, lần lượt thay $y = x_0$ và $y = -x_0$ vào (2), ta được

$$(f(0))^2 + \alpha x_0 = 0 \ \text{ và } \ (f(0))^2 + \alpha(-x_0) = 0$$

hay $f(0) = 0$ và $x_0 = 0$. Như vậy,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \tag{4}$$

Do đó, từ (2) ta có

$$f(y + f(y)) = \alpha y \ \ \forall y \in \mathbb{R} \tag{5}$$

và từ (3) ta có

$$f(x^2) = (f(x))^2 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Từ (1) và (6) suy ra

$$f(x+y+f(y)) = f(x) + \alpha y \ \ \forall x \geq 0, \ \ \forall y \in \mathbb{R} \tag{7}$$

Xét $X \geq 0$ tuỳ ý. Trong (7), thay $x = X$, $y = -\frac{f(X)}{\alpha}$, ta được

$$f\Big(X - \frac{f(X)}{\alpha} + f\Big(-\frac{f(X)}{\alpha}\Big)\Big) = 0$$

Từ đó, theo (4) ta có

$$X - \frac{f(X)}{\alpha} + f\Big(-\frac{f(X)}{\alpha}\Big) = 0$$

hay

$$-X = -\frac{f(X)}{\alpha} + f\Big(-\frac{f(X)}{\alpha}\Big) \tag{8}$$

Suy ra

$$f(-X) = f\Big(-\frac{f(X)}{\alpha}\Big) + f\Big(-\frac{f(X)}{\alpha}\Big)\Big) = \alpha\Big(-\frac{f(X)}{\alpha}\Big) = -f(X)$$

Từ đó, do X tuỳ ý và do (4), suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$. Từ (8), do $X \geq 0$ tuỳ ý, suy ra hàm số $g(x) = x + f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, nhận mọi giá trị thực không dương. Mà, dễ thấy, $g(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ nên suy ra $g(x)$ nhận mọi giá trị thực. Vì thế, hàm số g là một toàn ánh từ $\mathbb{R}$ lên $\mathbb{R}$.

Xét $x \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$ tuỳ ý. vì g là một toàn ánh từ $\mathbb{R}$ lên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $y_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $y_0 + f(y_0) = y$. Do đó

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x + y_0 + f(y_0)) = f(x) + \alpha y_0 \\ &= f(x) + f(y_0 + f(y_0) = f(x) + f(y) \end{aligned}$$

Suy ra

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \ \ \forall x, y \geq 0 \tag{9}$$

Hơn nữa từ (6) và (4) suy ra $f(x) > 0$, $\forall x > 0$. Từ đó với $x > y \geq 0$, ta có $0 < f(x-y) = f(x) - f(y)$, hay $f(x) > f(y)$. Như vậy

$$f(x) \ \text{ là hàm số đồng biến trên } \ \mathbb{R}^+ \tag{10}$$

Từ (9) và (10) suy ra $f(x) = ax \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+$ trong đó a là một hằng số thực. Từ đây, vì f là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ nên $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ngược lại, thay $f(x) = ax$ vào (1) ta được

$$a(x^2 + y + ay) = a^2x^2 + \alpha y, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $a = a^2$ và $a + a^2 = \alpha$, hay $a = 1$, và $\alpha = 2$, do $\alpha \neq 0$. Dễ thấy, với $\alpha = 2$ thì hàm số $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$, thoả mãn tất cả các điều kiện của đề bài.

Tóm lại, các kết quả đã thu được ở trên cho thấy: Có một và chỉ một hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn hệ thức của đề bài khi và chỉ khi $\alpha = 2$.

iii) Vậy, tất cả các số thực α thoả mãn yêu cầu của đề bài là $\alpha = 2$.

Bài 3. 1) Gọi H là giao điểm của CM và PQ. Ta cần chứng minh $PH = HQ$. Xét hai tam giác BCK và MBK có $\widehat{MBK} = \widehat{CKB}$, $\widehat{CBK} = \widehat{KMB}$ vì cùng chắn cung BC của dường tròn tâm O_1. Do đó $\triangle BCK \backsim \triangle MBK$, suy ra

$$\frac{BC}{MB} = \frac{CK}{BK} \tag{1}$$

Tương tự ta có $\triangle ACK \backsim MAK$, suy ra

$$\frac{AC}{MA} = \frac{CK}{AK} \tag{2}$$

Mà $AK = BK$ nên từ (1) và (2) ta được

$$\frac{BC}{MB} = \frac{AC}{MA} \tag{3}$$

Bây giờ ta chứng minh hai tam giác MPB và CQB đồng dạng. Thật vậy, $\widehat{BMP} = \widehat{BCQ}$, vì cùng bù với $\widehat{ACB}$, $\widehat{MPB} = \widehat{CQB}$ vì cùng chắn cung AB của đường tròn tâm O_2. Do đó, $\triangle MPB \backsim \triangle CQB$. Suy ra,

$$\frac{BC}{BM} = \frac{CQ}{MP} \tag{4}$$

Từ (3) và (4) ta được

$$\frac{AC}{MA} = \frac{CQ}{MP} \text{ hay } \frac{CQ}{CA}.\frac{MA}{MP} = 1 \tag{5}$$

Áp dụng định lý Menelauss cho tam giác APQ với cát tuyết MCH, ta được

$$\frac{HP}{HQ}.\frac{CQ}{CA}.\frac{MA}{MP} = 1 \tag{6}$$

Từ (5) và (6) suy ra $PH = HQ$.

2) Ta có $\widehat{CBM} = \widehat{PAQ} = \widehat{QBP}$, $\widehat{BCM} = \widehat{BAM} = \widehat{BQP}$. Do đó $\triangle BCM \backsim \triangle BQP$. Vì thế, tồn tại phép đồng dạng f tâm B biến $\triangle BCM$ thành $\triangle BQP$.

Vì các điểm B, C, M nằm trên (O_1) và các điểm B, Q, P nằm trên (O_2) nên f biến (O_1) thành (O_2). Gọi N là giao điểm thứ hai của AK và đường tròn (O_2), ta có

$$\widehat{CBA} = \widehat{QAN} = \widehat{QBN}$$

Mà f biến C thành Q nên từ đó suy ra f biến A thành N. Vì thế, phép đồng dạng f biến giao điểm K của các tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O_1) thành giao điểm L của các tiếp tuyến tại N và B của đường tròn (O_2). Vì A, K là các điểm cố định nên N cũng là điểm cố định. Do đó L là điểm cố định.

Vì f biến các điểm M, C thành các điểm P, Q và K nằm trên MC nên L nằm trên PQ. Vì thế, đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên đường tròn (O_1).

Bài 4. 1) Bằng cách tính toán trực tiếp, ta có $x_3 = 1201$ và $x_4 = 2003$. Viết lại hệ thức xác định dãy (x_n) dưới dạng

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 2\sqrt{x_{n+1}x_n - 2} \;\; \forall n \geq 1.$$

Từ đó suy ra

$$x_{n+2}^2 + x_{n+1}^2 + x_n^2 - 2x_{n+2}x_{n+1} - 2x_{n+2}x_n + 2x_{n+1}x_n = 4(x_{n+1}x_n - 2)$$

Do đó

$$x_{n+2}^2 + x_{n+1}^2 - 2x_{n+2}x_{n+1} - 2x_{n+2}x_n - 2x_{n+1}x_n + 8 = 0 \;\; \forall n \geq 1 \qquad (1)$$
$$x_{n+3}^2 + x_{n+2}^2 - 2x_{n+3}x_{n+2} - 2x_{n+3}x_{n+1} - 2x_{n+2}x_{n+1} + 8 = 0 \;\; \forall n \geq 0 \qquad (2)$$

Lấy (2) trừ (1), ta được

$$(x_{n+3} - x_n)(x_{n+3} + x_n - 2x_{n+2} - 2x_{n+1}) = 0 \;\; \forall n \geq 1 \qquad (3)$$

Dễ thấy dãy (x_n) là một dãy tăng. Vì thế, từ (3) ta được

$$x_{n+3} + x_n - 2x_{n+2} - 2x_{n+1} = 0 \;\; \forall n \geq 1.$$

hay

$$x_{n+3} = 2x_{n+2} + 2x_{n+1} - x_n, \;\; \forall n \geq 1 \qquad (4)$$

Mà x_1, x_2, x_3 là các số nguyên dương nên từ (4) suy ra x_n là số nguyên dương với mọi $n \geq 1$.

2) Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu r_n là số dư trong phép chi x_n cho 10^4. Khi đó, từ (4) ta có

$$r_{n+3} \equiv 2r_{n+2} - r_n \pmod{10^4}, \;\; \forall n \geq 1 \qquad (5)$$

hay

$$r_n \equiv 2r_{n+2} + 2r_{n+1} - r_{n+3} \pmod{10^4}, \quad \forall n \geq 1 \tag{6}$$

Xét dãy các bộ ba số

$$(r_1, r_2, r_3),\ (r_2, r_3, r_4), ..., (r_n, r_{n+1}, r_{n+2}),\ (r_{n+1}, r_{n+2}, r_{n+3}), ...$$

Dãy trên có vô số bộ số. Tuy nhiên, do $r_n \in \{0, 1, 2, ..., 10^4 - 1\}$ $\forall n \geq 1$ nên chỉ có hữu hạn bộ đôi một khác nhau (tối đa là 10^{12} bộ). Vì thế, theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai bộ trùng nhau. Nghĩa là, tồn tại các số nguyên dương m, k sao sao cho

$$(r_m, r_{m+1}, r_{m+2}) = (r_{m+k}, r_{m+k+1}, r_{m+k+2}).$$

Từ đó, nhờ (6) dễ chứng minh được

$$(r_1, r_2, r_3) = (r_{k+1}, r_{k+2}, r_{k+3}) \tag{7}$$

Từ (7), nhờ (5), bằng phương pháp quy nạp theo n dễ dàng chứng minh được dãy (r_n) là dãy tuần hoàn, kể từ số hạng thứ nhất. Mà $r_4 = 2003$ nên suy ra có vô số số nguyên dương n sao cho $r_n = 2003$. Nói cách khác, tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho biểu diễn thập phân của x_n có bốn chữ số tận cùng là 2003.

3) Với mỗi số nguyên dương, ký hiệu s_n là số dư trong phép chia x_n cho 4. Khi đó, từ (4) ta được

$$s_{n+3} \equiv 2s_{n+2} + 2s_{n+1} - s_n \pmod 4\ \forall n \geq 1 \tag{8}$$

Bằng cách tính toán trực tiếp, ta có $s_1 = 3, s_2 = 2, s_3 = 1, s_4 = 3, s_5 = 2, s_6 = 1$. Từ đó suy ra $s_1 = s_4, s_2 = s_5$ và $s_3 = s_6$. Từ đây, nhờ (8), bằng phương pháp quy nạp theo n, dễ dàng chứng minh được dãy s_n) là dãy tuần hoàn theo chu kỳ 3. Vì thế $s_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n - 2004$ không chia hết cho 4, và do đó không chia hết cho 10^4. Nói cách khác, không tồn tại số nguyên dương n sao cho x_n có bốn chữ số tận cùng là 2004.

Bài 5. Đặt $AA_1 = a, BB_1 = b, CC_1 = c, DD_1 = d, EE_1 = e, FF_1 = f, A_1B_1 = x, B_1C_1 = y, C_1D_1 = z, D_1E_1 = t, E_1F_1 = u, F_1A_1 = v$.

Gọi B_2 là điểm đối xứng với B qua A_1B_1, C_2 là điểm đối xứng với C qua B_1C_1. Khi đó, do $\widehat{A_1B_1C_1} = 120^\circ$ nên $\widehat{B_2B_1C_2} = 60^\circ$. Suy ra tam giác $B_2B_1C_2$ là tam giác đều. Vì thế $B_2C_2 = b$. Do đó

$$a + b + c = A_1B_2 + B_2C_2 + C_2C_1 \geq A_1C_1 \tag{1}$$

Mặt khác, theo định lý hàm số cosin ta có

$$A_1C_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + xyy} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y) \tag{2}$$

Từ (1) và(2) suy ra

$$a + b + c \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y) \tag{3}$$

Vì các cạnh của lục giác $BACDEF$ có vai trò như nhau nên từ (3) suy ra ta có các bất đẳng thức

$$b + c + d \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(y + z);\ c + d + e \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(z + t);\ d + e + f \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(t + u);$$
$$e + f + a \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(u + v);\ f + a + b \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(u + x).$$

Cộng vế theo vế bất đẳng thức (3) và năm bất đẳng thức trên, ta được

$$a + b + c + d + e + f \geq \frac{\sqrt{3}}{3}(x + y + z + t + u + v)$$

hay $p \geq 2\frac{\sqrt{3}}{3}p_1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi lục giác $ABCDEF$ là lục giác đều.

Bài 6. Đặt $s = |S|$ và $f(n) = |S_n|\ \forall n \in \mathbb{N}$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu $R_n = \{a+x \mid x \in S_{n-1}\}$. Rõ ràng, R_n là một tập con của S_n và $|R_n| = |S_{n-1}|$ nên

$$f(n) = |R_n| + |S_n \backslash R_n| = f(n-1) + |S_n \backslash R_n|,\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Đặt $m = s(a-1)$. Dễ thấy tổng của $n > m$ số thuộc S phải chứa ít nhất a số hạng trùng nhau. Do đó, với lưu ý rằng

$$\underbrace{d + d + \cdots + d}_{a \text{ số hạng}} = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{d \text{ số hạng}}\ \ \forall\, d \in S.$$

suy ra tổng của $n > m$ số thuộc S phải thuộc R_n. Vì vậy, $S_n \backslash R_n$ là một tập con của S_m. Do đó

$$S_n \backslash R_n = S_m \backslash R_n\ \ \forall\, n > m.$$

Đặt $k = (m-1)a$. Rõ ràng, với $n > k$ thì mỗi số thuộc $R_n \backslash R_{n-1}$ đều lớn hơn hoặc bằng

$$a + n - 1 \geq a + k = a + (m-1)a = ma.$$

Do mọi số của $S_m \backslash R_k$ phải nhỏ hơn ma nên $S_m \backslash R_n = S_m \backslash R_{n-1}$ với mọi $n > k$. Từ đó suy ra $S_n \backslash R_n = S_m \backslash R_k$, và do đó

$$|S_n \backslash R_n| = |S_m \backslash R_k| = |S_k \backslash R_k| \ \ \forall n > k.$$

Vì thế, đặt $b = f(k) - k|S_k \backslash R_k|$, ta có

$$f(n) = f(n-1) + |S_k \backslash R_k| = (n-k)|S_k \backslash R_k| + f(k) = n|S_k \backslash R_k| + b \ \ \forall\, n > k.$$

Tiếp theo, ta chứng minh $|S_k \backslash R_k| = a$. Thật vậy, xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $s = 2$. Khi đó $k = 2a^2 - 3a \geq a$. Giả sử $S = \{c, a\}$. Do $(c, a) = 1$ theo giả thiết của đề bài, nên $S_k \backslash R_k = \{0, c, 2c, ..., (a-1)c\}$. Vì vậy $|S_k \backslash R_k| = a$.

Trường hợp 2. $s > 2$. Gọi c là số nhỏ nhất trong S, ta có $(c, a) = 1$. Vì thế, theo chứng minh ở trường hợp 1, tồn tại số nguyên tố b' sao cho $f(n) \geq an + b'$ với mọi $n > 2a^2$. Do đó, nếu $|S_k \backslash R_k| \leq a - 1$ thì

$$an + b' \leq f(n) = n|S_k \backslash R_k| \leq (a-1)n + b.$$

Suy ra $n \leq b - b'$, là điều vô lí vì n có thể lớn tuỳ ý. Như vậy, phải có $|S_k \backslash R_k| \geq a$. Vậy, tóm lại, tồn tại số nguyên dương k và số nguyên b sao cho

$$|S_n| = an + b \ \text{ với mọi } n > k.$$