Võ Quốc Bá Cẩn – Nguyễn Văn Thạch – Nguyễn Phi Hùng
Phan Hồng Sơn – Võ Thành Văn

Collected problems

About inequality

Ngày 24 tháng 5 năm 2007

Mục lục

Chương 1

Problems

1. Cho x, y, z là các số dương thỏa $xy + yz + zx = 1$, chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{1+(2x-y)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(2y-z)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(2z-x)^2}} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

2. Cho các số dương a, b, c thỏa $abc = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a\sqrt{b+c}}{b+c+1} + \frac{b\sqrt{c+a}}{c+a+1} + \frac{c\sqrt{a+b}}{a+b+1} \ge \sqrt{2}$$

3. Với mọi số không âm a, b, c, ta có

$$\sqrt{\frac{a}{4a+4b+c}} + \sqrt{\frac{b}{4b+4c+a}} + \sqrt{\frac{c}{4c+4a+b}} \le 1$$

4. Cho các số dương a, b, c, chứng minh

$$\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \le \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$$

5. Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta luôn có

$$\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2} + \frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2} + \frac{c^3}{2c^2-ca+2a^2} \ge \frac{a+b+c}{3}$$

6. Cho các số không âm a, b, c thỏa $a + b + c = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}} + \sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{4}} + \sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{4}} \le \sqrt{3} + \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(|a-b|+|b-c|+|c-a|)$$

7. Cho các số dương a, b, c thỏa $a + b + c = 3$, chứng minh bất đẳng thức

$$a^{3/2}b + b^{3/2}c + c^{3/2}a \le 3$$

8. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, ta có

$$\frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2} + \frac{bc}{4b^2+c^2+4a^2} + \frac{ca}{4c^2+a^2+4b^2} \le \frac{1}{3}$$

9. Cho các số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=3$, chứng minh
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a+1)(b+1)}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{(b+1)(c+1)}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{(c+1)(a+1)}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

10. Với mọi $a \geq b \geq c \geq 0$, đặt
$$P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$
$$Q=\frac{2(b+c)-a}{4a+b+c}+\frac{2(c+a)-b}{4b+c+a}+\frac{2(a+b)-c}{4c+a+b}$$
Chứng minh rằng
    (a) Nếu $a+c \geq 2b$ thì $P \geq Q$.
    (b) Nếu $a+c \leq 2b$ thì $P \leq Q$.

11. Cho các số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=1$, đặt $x=a^2+b^2+c^2$, chứng minh bất đẳng thức
$$\sqrt{1+2a^2-x}+\sqrt{1+2b^2-x}+\sqrt{1+2c^2-x} \geq \sqrt{11-9x}$$

12. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c>0$, ta có
$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{3}{2(abc)^{2/3}}$$

13. Chứng minh rằng nếu $a, b, c>0$ thì
$$\frac{1}{a\sqrt{a+b}}+\frac{1}{b\sqrt{b+c}}+\frac{1}{c\sqrt{c+a}} \geq \frac{3}{\sqrt{2abc}}$$

14. Cho các số dương x, y, z thỏa $x^2+y^2+z^2 \geq 3$, chứng minh rằng
$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0$$

15. Cho $n \geq 3$ và $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số không âm thỏa $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$, chứng minh bất đẳng thức
$$\frac{1}{\sqrt{3}}(a_1+a_2+\cdots+a_n) \geq a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1$$

16. Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức
$$\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \sqrt{3}+1$$

17. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c>0$, ta có
$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{8(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 11$$

18. Chứng minh rằng với mọi số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, ta có
$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2b_i}{a_i+b_i}\right)$$

19. Chứng minh rằng với các số thực a, b, c đôi một khác nhau, ta có

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right)\geq\frac{27}{4}$$

20. Cho các số không âm a, b, c, d thỏa $a^2+b^2+c^2+d^2=4$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{3-abc}+\frac{1}{3-bcd}+\frac{1}{3-cda}+\frac{1}{3-dab}\leq 2$$

21. Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}}$$

22. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{7\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c}+\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{a^3+b^3+c^3}\geq 8$$

23. Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta có

$$\frac{a^3}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^3}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^3}{c^3+abc+a^3}\geq 1$$

24. Cho các số dương a, b, c, d, chứng minh rằng

$$\frac{abc}{(d+a)(d+b)(d+c)}+\frac{abd}{(c+a)(c+b)(c+d)}+\frac{acd}{(b+a)(b+c)(b+d)}+\frac{bcd}{(a+b)(a+c)(a+d)}\geq\frac{1}{2}$$

25. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$, ta có

$$a^{b+c}+b^{c+a}+c^{a+b}\geq 1$$

26. Cho $n\geq 3, n\in\mathbb{N}$ và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số không âm có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1^3x_2^2+x_2^3x_3^2+\cdots+x_n^3x_1^2+n^{2(n-1)}x_1^3x_2^3\cdots x_n^3$$

27. Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa $a_1a_2\cdots a_n=1$, tìm các hằng số tốt nhất m, M sao cho

$$\sqrt{a_1^2+n^2-1}+\sqrt{a_2^2+n^2-1}+\cdots+\sqrt{a_n^2+n^2-1}\leq m(a_1+a_2+\cdots+a_n)+M$$

28. Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c, d, ta có

$$\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}+\frac{b}{3b^2+2c^2+d^2}+\frac{c}{3c^2+2d^2+a^2}+\frac{d}{3d^2+2a^2+b^2}\leq\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

29. Cho các số dương x, y, z, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x(y+z)}{x^2+yz}+\frac{y(z+x)}{y^2+zx}+\frac{z(x+y)}{z^2+xy}\leq\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\leq\frac{x^2+yz}{x(y+z)}+\frac{y^2+zx}{y(z+x)}+\frac{z^2+xy}{z(x+y)}$$

30. Với mọi số dương a, b, c thỏa $a+b+c=3$, ta có

$$\frac{a}{b^2+c}+\frac{b}{c^2+a}+\frac{c}{a^2+b}\geq\frac{3}{2}$$

31. Với mọi số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=3$, ta có

$$a\sqrt{b^3+1}+b\sqrt{c^3+1}+c\sqrt{a^3+1}\le 5$$

32. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a, b, c>0$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9+\frac{k\max\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\}}{(a+b+c)^2}$$

33. Cho các số dương x, y, z có tích bằng 1, chứng minh rằng với mọi $k\ge 0$, ta có

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y+k}}+\sqrt[3]{\frac{y}{z+k}}+\sqrt[3]{\frac{z}{x+k}}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{k+1}}$$

34. Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{b^2+c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2+a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2+b^2}{c(a+b)}\ge(a^2+b^2+c^2)\sqrt{\frac{3}{abc(a+b+c)}}$$

35. Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+3(a+b+c)\ge\frac{15(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

36. Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z có tích bằng 1 và với mọi $k\ge 0$, ta có

$$\sqrt[4]{\frac{x}{y+k}}+\sqrt[4]{\frac{y}{z+k}}+\sqrt[4]{\frac{z}{x+k}}\ge\frac{3}{\sqrt[4]{k+1}}$$

37. Chứng minh rằng với mọi số không âm a, b, c và với mọi $k\ge 3$, ta có

$$\frac{a(b^k+c^k)}{a^2+bc}+\frac{b(c^k+a^k)}{b^2+ca}+\frac{c(a^k+b^k)}{c^2+ab}\ge a^{k-1}+b^{k-1}+c^{k-1}$$

38. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^4}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^4}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^4}{c^3+abc+a^3}\ge\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}$$

39. Cho các số dương x, y, z, t thỏa

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{t+1}=1$$

Chứng minh rằng

$$\min\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t},\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{x},\frac{1}{t}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right\}\le 1\le$$
$$\le\max\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t},\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{x},\frac{1}{t}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right\}$$

40. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{\sqrt{4a^2+ab+4b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{4b^2+bc+4c^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{4c^2+ca+4a^2}}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

41. Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+27}$$

42. Cho các số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=1$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt{c+2a}}\le\sqrt{\frac{3}{2}}$$

43. Cho các số không âm a, b, c, tìm hằng số k tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}+\frac{k\max\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\}}{ab+bc+ca}$$

44. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{c+a}\right)^3\le\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^2$$

45. Cho a, b, c, d là các số dương thỏa mãn $a, b, c\ge 1$ và $abcd=1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a^2-a+1)^2}+\frac{1}{(b^2-b+1)^2}+\frac{1}{(c^2-c+1)^2}+\frac{1}{(d^2-d+1)^2}\le 4$$

46. Với mọi số không âm a, b, c, chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2+4bc}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+4ca}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+4ab}{a^2+b^2}}\ge 2+\sqrt{2}$$

47. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{(a-b)(13a+5b)}{a^2+b^2}+\frac{(b-c)(13b+5c)}{b^2+c^2}+\frac{(c-a)(13c+5a)}{c^2+a^2}\ge 0$$

48. Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c, n, ta có

$$\left(\frac{a^2+bc}{b+c}\right)^n+\left(\frac{b^2+ca}{c+a}\right)^n+\left(\frac{c^2+ab}{a+b}\right)^n\ge a^n+b^n+c^n$$

49. Cho các số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=1$. Tùy theo giá trị của $n\in\mathbb{N}$, hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P(a,b,c)=a(b-c)^n+b(c-a)^n+c(a-b)^n$$

50. Cho các số dương a, b, c thỏa $a+b+c=3$, tìm hằng số k lớn nhất sao cho

$$\frac{a^5+b^5+c^5-3}{a^3+b^3+c^3-3}\ge k$$

51. Cho các số không âm a, b, c thỏa $a^2+b^2+c^2=8$, chứng minh bất đẳng thức

$$4(a+b+c-4)\le abc$$

52. Cho m, n $(3n^2 > m^2)$ là các số thực cho trước và a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = m, a^2 + b^2 + c^2 = n^2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$P = a^2b + b^2c + c^2a$$

53. Tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho với mọi $a, b, c \geq 0$ thì

$$\sqrt{\frac{a^3}{ka^2 + (b+c)^2}} + \sqrt{\frac{b^3}{kb^2 + (c+a)^2}} + \sqrt{\frac{c^3}{kc^2 + (a+b)^2}} \leq \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{k+4}}$$

54. Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$ thì

$$(ab + bc + ca)\left(\frac{a}{b^2+9} + \frac{b}{c^2+9} + \frac{c}{a^2+9}\right) \leq \frac{9}{10}$$

55. Cho các số dương a, b, c thỏa $a + b + c = 3$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{3}{2}$$

56. Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương thì

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}} \geq \sqrt{\frac{16(a+b+c)^3}{3(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

57. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{1}{a(1+bc)^2} + \frac{1}{b(1+ca)^2} + \frac{1}{c(1+ab)^2} \leq \frac{k}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)} + \frac{3}{4} - \frac{k}{8}$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa $abc = 1$.

58. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức sau với $k = \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$

$$\left(\frac{a^2}{b^2+bc+c^2}\right)^{1/k} + \left(\frac{b^2}{c^2+ca+a^2}\right)^{1/k} + \left(\frac{c^2}{a^2+ab+b^2}\right)^{1/k} \geq 2$$

59. Cho các số không âm a, b, c chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a^2+bc}{b^2+bc+c^2}} + \sqrt{\frac{b^2+ca}{c^2+ca+a^2}} + \sqrt{\frac{c^2+ab}{a^2+ab+b^2}} \geq \sqrt{6}$$

60. Chứng minh rằng với mọi $x, y \in [0, 1]$, ta có

$$\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{1}{y^2-y+1} \geq 1 + \frac{1}{x^2y^2-xy+1}$$

61. Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{c+a}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$$

62. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$, ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^2(b+c)}{(b^2+c^2)(2a+b+c)} + \frac{b^2(c+a)}{(c^2+a^2)(2b+c+a)} + \frac{c^2(a+b)}{(a^2+b^2)(2c+a+b)} \geq \frac{2}{3}$$

63. Cho các số dương a, b, c, chứng minh rằng với mọi $k \geq 2$, ta có bất đẳng thức

$$\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \geq \sqrt[k]{\frac{a+c}{b+c}} + \sqrt[k]{\frac{c+b}{a+b}} + \sqrt[k]{\frac{b+a}{c+a}}$$

64. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a+b}} \geq 2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + 1}$$

65. Cho các số thực a, b, c, d thỏa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$, chứng minh bất đẳng thức

$$9(a+b+c+d) \leq 4abcd + 32$$

66. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a^2 + 256bc}{b^2 + c^2}} + \sqrt{\frac{b^2 + 256ca}{c^2 + a^2}} + \sqrt{\frac{c^2 + 256ab}{a^2 + b^2}} \geq 12$$

67. Cho các số dương x, y, z có tích bằng 1, chứng minh rằng

$$\frac{x}{y^4 + 2} + \frac{y}{z^4 + 2} + \frac{z}{x^4 + 2} \geq 1$$

68. Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c, d ta có bất đẳng thức

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+d} + \frac{1}{d+a}\right) \geq \frac{16}{abcd+1}$$

69. Cho các số dương a, b, c, d thỏa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a+b+c+d}{2} \leq \sqrt[3]{(abcd+1)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)}$$

70. Cho các số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Khi đó, với mọi $k \in \mathbb{R}$, ta có

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + \cdots + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \min\left\{1, \frac{n}{2^k}\right\}$$

71. Cho a, b, c là các số dương, chứng minh rằng

(a) $\dfrac{a^9}{bc} + \dfrac{b^9}{ca} + \dfrac{c^9}{ab} + \dfrac{2}{abc} \geq a^5 + b^5 + c^5 + 2$

(b) $\dfrac{a^9}{bc} + \dfrac{b^9}{ca} + \dfrac{c^9}{ab} + \dfrac{3}{abc} \geq a^4 + b^4 + c^4 + 3$

72. Cho x, y, z, t là các số dương thỏa $xyzt = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{xy + yz + zx + 1} + \frac{1}{yz + zt + ty + 1} + \frac{1}{zt + tx + xz + 1} + \frac{1}{tx + xy + yt + 1} \leq 1$$

73. Chứng minh rằng với mọi $x, y, z, t > 0$ thì

$$(x+y)(x+z)(x+t)(y+z)(y+t)(z+t) \geq 4xyzt(x+y+z+t)^2$$

74. Chứng minh rằng với mọi số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa $a_1a_2\cdots a_n = 1$ ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\cdots+\sqrt{a_n^2+1} \le \sqrt{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

75. Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta có bất đẳng thức

$$\frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3} \le \sqrt[3]{a\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3}}$$

76. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} \ge a^2+b^2+c^2$$

77. Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+6ab+2b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+6bc+2c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+6ca+2a^2}} \ge 1$$

78. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}+3\sqrt{\frac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}} \ge \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

79. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{16(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \ge 8$$

80. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$3(a^3+b^3+c^3)+2abc \ge 11\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{3/2}$$

81. Cho các số không âm a, b, c, d thỏa $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^3}{1-bcd}+\frac{b^3}{1-cda}+\frac{c^3}{1-dab}+\frac{d^3}{1-abc} \ge \frac{4}{7}$$

82. Cho các số không âm a, b, c, d thỏa $a^3+b^3+c^3+d^3=1$, chứng minh bất đẳng thức

$$1 \le \frac{a^3}{1-bcd}+\frac{b^3}{1-cda}+\frac{c^3}{1-dab}+\frac{d^3}{1-abc} \le \frac{4}{3}$$

83. Cho các số dương a, b, c, d thỏa $a+b+c+d=4$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{da} \ge a^2+b^2+c^2+d^2$$

84. Cho các số dương x, y, z, tìm hằng số k lớn nhất sao cho

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+3k \ge (k+1)\cdot\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

85. Cho các số không âm a, b, c, d, chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+c+d}}+\sqrt{\frac{c}{c+d+a}}+\sqrt{\frac{d}{d+a+b}} \leq \frac{4}{\sqrt{3}}$$

86. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c, d \in [1, 2]$, ta có

$$\frac{a+b}{c+d}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{a+c}{b+d} \leq \frac{3}{2}$$

87. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$, ta luôn có

$$\frac{a^2 b}{c(b+c)}+\frac{b^2 c}{a(c+a)}+\frac{c^2 a}{b(a+b)} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

88. Cho các số không âm a, b, c, thỏa $a^2+b^2+c^2=3$, chứng minh rằng

$$1+4abc \geq 5\min\{a, b, c\}$$

89. Với mọi $a, b, c \geq 0$ và $ab+bc+ca=1$, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2+3bc}}+\frac{1}{\sqrt{2b^2+3ca}}+\frac{1}{\sqrt{2c^2+3ab}} \geq \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

90. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$, chứng minh bất đẳng thức

1. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a} \geq 5$
2. $\dfrac{1}{12} \leq \dfrac{a^2 b+b^2 c+c^2 a}{(a+b+c)^3} \leq \dfrac{5}{36}$

91. Tìm hằng số $k > 0$ nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức

$$\sqrt{a+k(b-c)^2}+\sqrt{b+k(c-a)^2}+\sqrt{c+k(a-b)^2} \geq \sqrt{3}$$

đúng với mọi $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=1$.

92. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$ thì

$$\sqrt{\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3+abc}{(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3+abc}{(a+b)^3}} \geq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

93. Cho các số dương a, b, c, chứng minh rằng

$$\frac{ab^2}{c^2}+\frac{bc^2}{a^2}+\frac{ca^2}{b^2}+a+b+c \geq \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

94. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

với $a, b, c \geq 0$ thỏa $a^2+b^2+c^2=1$.

95. Với mọi số dương a, b, c, d,

$$\frac{b(a+c)}{c(a+b)}+\frac{c(b+d)}{d(b+c)}+\frac{d(c+a)}{a(c+d)}+\frac{a(d+b)}{b(d+a)} \geq 4$$

96. Chứng mình rằng với mọi số thực a, b, c thì

$$\frac{a^2-bc}{a^2+2b^2+3c^2}+\frac{b^2-ca}{b^2+2c^2+3a^2}+\frac{c^2-ca}{c^2+2a^2+3b^2}\geq 0$$

97. Cho các số không âm x, y, z, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x^4}{x^4+x^2yz+y^2z^2}+\frac{y^4}{y^4+y^2zx+z^2x^2}+\frac{z^4}{z^4+z^2xy+x^2y^2}\geq 1$$

98. Cho các số dương a, b, c thỏa $abc=1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\leq 3$$

99. Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c,

$$\frac{3a^2-2ab-b^2}{3a^2+2ab+3b^2}+\frac{3b^2-2bc-c^2}{3b^2+2bc+3c^2}+\frac{3c^2-2ca-a^2}{3c^2+2ca+3a^2}\geq 0$$

100. Cho các số dương a, b, c thỏa $a^4+b^4+c^4=3$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b^3+1}+\frac{b^2}{c^3+1}+\frac{c^2}{a^3+1}\geq \frac{3}{2}$$

101. Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{9}{2}\cdot\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{(a+b+c)^4}\geq \frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{b+c}+\frac{c^3}{c+a}$$

102. Cho các số dương a, b, c, d thỏa $a+b+c+d=4$, tìm hằng số k tốt nhất sao cho

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}-4\geq k(a^2+b^2+c^2+d^2-4)$$

103. Cho các số dương x, y, z thỏa $xy+yz+zx=1$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x(y+z)^2}{(1+yz)^2}+\frac{y(z+x)^2}{(1+zx)^2}+\frac{z(x+y)^2}{(1+xy)^2}\geq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

104. Cho các số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=3$, chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{a+\sqrt{b^2+c^2}}+\sqrt{b+\sqrt{c^2+a^2}}+\sqrt{c+\sqrt{a^2+b^2}}\geq 3\sqrt{\sqrt{2}+1}$$

105. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, chứng minh rằng

$$\frac{a}{3a+b-c}+\frac{b}{3b+c-a}+\frac{c}{3c+a-b}\geq 1$$

106. Cho các số dương a, b, c thỏa $a^2+b^2+c^2=3$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{ab+3}+\frac{b}{bc+3}+\frac{c}{ca+3}\leq \frac{3}{4}$$

107. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2+(c+a)^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{c^2+(a+b)^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2+(b+c)^2}} \le \frac{3}{\sqrt{5}}$$

108. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a(a-b)}{a^2+2bc}+\frac{b(b-c)}{b^2+2ca}+\frac{c(c-a)}{c^2+2ab} \ge 0$$

109. Cho các số dương a, b, c, chứng minh

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+7ab+b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+7bc+c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+7ca+a^2}} \ge 1$$

110. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ab}} \le \sqrt{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

111. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác, chưng minh rằng

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3\right) \ge 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}-3\right)$$

112. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác thì

$$\frac{a^2b}{c}+\frac{b^2c}{a}+\frac{c^2a}{b} \ge a^2+b^2+c^2$$

113. Cho các số không âm a, b, c chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \ge 12$$

114. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge 3\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^{2/3}$$

115. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge 2\sqrt[3]{\frac{9(a^3+b^3+c^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

116. Cho các số không âm x, y, z thỏa $x+y^2+z^2=1$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3}{z^2+zx+x^2} \ge \frac{1}{2}$$

117. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+a^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+b^2} \ge \frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}+\frac{c+a}{c+b}$$

118. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác, chứng minh rằng

$$3(a^3b + b^3c + c^3a) \geq (a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)$$

119. Cho các số thực a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$15a^2b^2c^2 + 12(a^4 + b^4 + c^4)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 11(a^6 + b^6 + c^6) + 30abc(a^3 + b^3 + c^3)$$

120. Cho các số không âm a, b, c, d thỏa $a + b + c + d = 3$, chứng minh bất đẳng thức

$$ab(b + c) + bc(c + d) + cd(d + a) + da(a + b) \leq 4$$

121. Cho a, b, c là các số khôn âm thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, chứng minh rằng

$$\left[1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{c+a}{2}\right)^2\right] \geq \frac{8}{27}$$

122. Cho các số không âm a, b, c, d, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{cd}{c+d} + \frac{da}{d+a} \leq \sqrt{(a+c)(b+d)}$$

123. Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta có bất đẳng thức

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{c^2+b^2}{a^2+b^2}} + \sqrt{\frac{b^2+a^2}{c^2+a^2}}$$

124. Cho các số không âm a, b, c thỏa $a + b + c = 5$, chứng minh bất đẳng thức

$$16(a^3b + b^3c + c^3a) + 640 \geq 11(ab^3 + bc^3 + ca^3)$$

125. Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a+b+c} \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

126. Chứng minh rằng với mọi số không âm a, b, c, d ta có

$$\frac{1}{a^3+b^3} + \frac{1}{a^3+c^3} + \frac{1}{a^3+d^3} + \frac{1}{b^3+c^3} + \frac{1}{b^3+d^3} + \frac{1}{c^3+d^3} \geq \frac{243}{2(a+b+c+d)^3}$$

127. Chứng minh rằng với mọi số không âm a, b, c, d ta có

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{b^2+c^2+d^2} + \frac{1}{c^2+d^2+a^2} + \frac{1}{d^2+a^2+b^2} \geq \frac{12}{(a+b+c+d)^2}$$

128. Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \leq \sqrt{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)}$$

129. Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c thì

$$\frac{a^2-bc}{\sqrt{a^2+2b^2+3c^2}} + \frac{b^2-ca}{\sqrt{b^2+2c^2+3a^2}} + \frac{c^2-ab}{\sqrt{c^2+2a^2+3b^2}} \geq 0$$

130. Cho các số dương a, b, c thỏa $a+b+c=1$, chứng minh bất đẳng thức

$$\left(\frac{1}{a}-2\right)^2+\left(\frac{1}{b}-2\right)^2+\left(\frac{1}{c}-2\right)^2 \geq \frac{8(a^2+b^2+c^2)^2}{(1-a)(1-b)(1-c)}$$

131. Cho các số không âm a, b, c, d thỏa $a+b+c+d=1$, chứng minh bất đẳng thức

$$\left|a^4-b^4+c^4-d^4-2a^2c^2+2b^2d^2+4ab^2c+4cd^2a-4bc^2d-4da^2b\right| \leq 1$$

132. Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{ab(a^2+bc)}{b+c}+\frac{bc(b^2+ca)}{c+a}+\frac{ca(c^2+ab)}{a+b} \geq \sqrt{3abc(ab^2+bc^2+ca^2)}$$

133. Tìm hằng số a nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^a \left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^{\frac{3-a}{2}} \geq \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}$$

đúng với mọi số thực dương x, y, z.

134. Cho các số không âm a, b, c thỏa $a^2+b^2+c^2=1$, chứng minh bất đẳng thức

$$1 \leq \frac{a}{\sqrt{1+bc}}+\frac{b}{\sqrt{1+ca}}+\frac{c}{\sqrt{1+ab}} \leq \frac{3}{2}$$

135. Cho a, b, c là các số không âm, chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}} \geq \sqrt{2+2\sqrt{1+4\sqrt{\frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}}}$$

136. Cho a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^2-ab+b^2}{a+b}+\frac{b^2-bc+c^2}{b+c}+\frac{c^2-ca+a^2}{c+a} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}$$

137. Chứng minh rằng với mọi số dương $a, b, c > 0$ thỏa $abc=1$, ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{a+b+c+1} \geq 1$$

138. Cho các số dương x, y, x thỏa $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2+xyz}+\sqrt{y^2+xyz}+\sqrt{z^2+xyz} \geq \sqrt{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx+2\sqrt{3xyz}}$$

139. Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số không âm thỏa $x^2+y^2+z^2=1$ thì

$$\frac{9}{\sqrt[3]{18}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{z+x}{2}\right)^2}} \geq 1+\frac{4}{\sqrt[3]{6}}$$

140. Chứng minh rằng với mọi số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=1$,

$$\frac{a}{\sqrt{4a+5b^2}}+\frac{b}{\sqrt{4b+5c^2}}+\frac{c}{\sqrt{4c+5a^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{17}}$$

141. Tìm hằng số $k = k(n)$ lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \ge k(n)(a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n)$$

142. Với mọi số dương a, b, c, ta có

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c+a}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{a+b}} \ge \sqrt[3]{9(a+b+c)}$$

143. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\left(a + \frac{b^2}{c}\right)^2 + \left(b + \frac{c^2}{a}\right)^2 + \left(c + \frac{a^2}{b}\right)^2 \ge \frac{12(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c}$$

144. Cho các số không âm a, b, c thỏa $ab + bc + ca = 1$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{a+bc}} + \frac{1}{\sqrt{b+ca}} + \frac{1}{\sqrt{c+ab}} \ge 2\sqrt{2}$$

145. Cho các số dương a, b, c thỏa $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, chứng minh

$$\sqrt{\frac{a+b}{b+1}} + \sqrt{\frac{b+c}{c+1}} + \sqrt{\frac{c+a}{a+1}} \ge 3$$

146. Cho $a_1, a_2, \dots, a_5$ là các số dương thỏa

$$a_1a_2\cdots a_5 = a_1(1+a_2) + a_2(1+a_3) + \cdots + a_5(1+a_1) + 2$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_5}.$$

147. Với mọi số dương a, b, c, ta có

$$\frac{a(a+c)}{b(b+c)} + \frac{b(b+a)}{c(c+a)} + \frac{c(c+b)}{a(a+b)} \ge \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}$$

148. Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương,

$$\frac{a(b+c)}{\sqrt{a^2+bc}} + \frac{b(c+a)}{\sqrt{b^2+ca}} + \frac{c(a+b)}{\sqrt{c^2+ab}} \le \sqrt{6(a^2+b^2+c^2)}$$

149. Cho a, b, c là các số dương, chứng minh rằng

$$3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 2\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}$$

150. Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$, chứng minh

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - 2(a^2+b^2+c^2) \ge \sqrt{3} - 2$$

151. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$a + b + c + kabc \ge k + 3$$

với mọi số không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca + 6abc = 9$.

152. Cho các số không âm a, b, c thỏa $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}\geq\sqrt{2}$$

153. Cho các số không âm x, y, z thỏa $6\geq x+y+z\geq 3$, chứng minh rằng

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}+\sqrt{1+z}\geq\sqrt{xy+yz+zx+15}$$

154. Cho các số dương x, y, z thỏa $xyz=1$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{y+z}{x^3+yz}+\frac{z+x}{y^3+zx}+\frac{x+y}{z^3+xy}\leq\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$$

155. Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$3\sqrt[9]{\frac{9a(a+b)}{2(a+b+c)^2}}+\sqrt[3]{\frac{6bc}{(a+b)(a+b+c)}}\leq 4$$

156. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{(a+2b)^2}+\frac{1}{(b+2c)^2}+\frac{1}{(c+2a)^2}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}$$

157. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\leq 2$$

158. Cho các số không âm x, y, z thỏa $x+y+z=3$, chứng minh bất đẳng thức

$$x^2y+y^2z+\frac{3}{2}xyz\leq 4$$

159. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\geq\frac{3(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}$$

160. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{4}{3}(ab^2+bc^2+ca^2)+a^2+b^2+c^2+2\geq 3(ab+bc+ca)$$

161. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}}\geq\frac{4}{a+b+c}$$

162. Cho các số thực a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1+a^2b^2}{(a-b)^2}+\frac{1+b^2c^2}{(b-c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c-a)^2}\geq\frac{3}{2}$$

163. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 3\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2}}$$

164. Cho các số dương a, b, c, chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-2}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge 2$$

165. Cho các số thực a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\left(\frac{a(b+c)}{(a+b)(a+c)}\right)^2+\left(\frac{b(c+a)}{(b+c)(b+a)}\right)^2+\left(\frac{c(a+b)}{(c+a)(c+b)}\right)^2 \ge \frac{1}{2}$$

166. Cho các số không âm x, y, z thỏa $x+y+z=1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2} \le \frac{11}{5}$$

167. Cho các số không âm a, b, c, d thỏa $a+b+c+d=4$, tìm hằng số $k > \frac{64}{27}$ nhỏ nhất để bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{1}{k-abc}+\frac{1}{k-bcd}+\frac{1}{k-cda}+\frac{1}{k-dab} \le \frac{4}{k-1}$$

168. Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$3(a+b+c) \ge 2\left(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}\right)$$

169. Cho dãy dương $\{x_n\}$ thỏa $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \ge \sqrt{k}$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$, chứng minh bất đẳng thức

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \ge \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

170. Cho các số không âm a, b, c thỏa $6 \ge a+b+c \ge 3$, chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1} \ge \sqrt{15+ab+bc+ca}$$

171. Cho các số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=1$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{\frac{1}{b}-1}}+\frac{b}{\sqrt{\frac{1}{c}-1}}+\frac{c}{\sqrt{\frac{1}{a}-1}} \le \frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}$$

172. Cho các số dương a, b, c thỏa $abc = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{ab+bc+ca+1} \ge 1$$

173. Cho các số dương x, y, z. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{x}{8y+z}}+\sqrt{\frac{y}{8z+x}}+\sqrt{\frac{z}{8x+y}} \ge 1$$

174. Cho các số thực dương a, b, c có tổng bằng 1, chứng minh rằng

$$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{12}}+\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{12}}+\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{12}} \le \sqrt{3}$$

Chương 2

Solution

1 *Cho x, y, z là các số dương thỏa $xy + yz + zx = 1$, chứng minh*

$$\frac{1}{\sqrt{1+(2x-y)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(2y-z)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(2z-x)^2}} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải. Đặt $a = 2x - y, b = 2y - z, c = 2z - x$, do đó $a + b + c = x + y + z > 0$ và từ $xy + yz + zx = 1$, ta có

$$14(a^2 + b^2 + c^2) + 35(ab + bc + ca) = 49$$

Lại có $3(14(a^2 + b^2 + c^2) + 35(ab + bc + ca)) \le 49(a + b + c)^2$, nên

$$a + b + c \ge \sqrt{3}$$

Ta sẽ chứng minh với mọi số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c \ge \sqrt{3}$, thì

$$P(a, b, c) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Nếu $c \le 0$, thay c bởi $c' = -c$, thì ta cũng có $a+b+c' \ge \sqrt{3}$, và giá trị của biểu thức P vẫn không đổi, do đó, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a, b, c > 0$, khi đó, đặt $a = ka_1, b = kb_1, c = kc_1$ với $k \ge 1, a_1, b_1, c_1 > 0$ sao cho $a_1 + b_1 + c_1 = \sqrt{3}$, thì

$$P(a, b, c) = \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{k^2 a_1^2 + 1}} \le \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + 1}} = P(a_1, b_1, c_1)$$

Như vậy, ta có thể giả sử $a, b, c > 0$ và $a + b + c = \sqrt{3}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, ta có

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 1}{(x^2 + 1)^{5/2}}$$

Từ đây, ta có thể dễ dàng kiểm tra được f lõm trên $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ và lồi trên $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{3}\right]$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c > 0$, từ đây suy ra $c \le \frac{1}{\sqrt{3}}$, Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $b \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, sử dụng bất đẳng thức Jensen

$$f(b) + f(c) \le 2f\left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{\left(\sqrt{3} - a\right)^2 + 4}}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{4}{\sqrt{\left(\sqrt{3} - a\right)^2 + 4}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \le \frac{3\sqrt{3}}{2} \tag{2.1}$$

Thật vậy, đặt $a = \frac{t}{\sqrt{3}}$ thì $3 \geq t \geq 1$ và ta cần chứng minh

$$\frac{4}{\sqrt{t^2 - 6t + 21}} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + 3}} \leq \frac{3}{2}$$

Hay

$$\frac{16}{t^2 - 6t + 21} + \frac{1}{t^2 + 3} + \frac{8\sqrt{(t^2 + 3)(t^2 - 6t + 21)}}{(t^2 + 3)(t^2 - 6t + 21)} \leq \frac{9}{4}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\sqrt{t^2 + 3} \leq \frac{t^2 + 7}{4}, \qquad \sqrt{t^2 - 6t + 21} \leq \frac{t^2 - 6t + 37}{8}$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{16}{t^2 - 6t + 21} + \frac{1}{t^2 + 3} + \frac{(t^2 + 7)(t^2 - 6t + 37)}{4(t^2 + 3)(t^2 - 6t + 21)} \leq \frac{9}{4}$$

Hay

$$(t - 1)^2(t - 2)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.

Trường hợp 2. $b \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, ta có

$$f(a) + f(b) \leq f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(a + b - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức Jensen,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f(c) \leq 2f\left(\frac{c + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}\right) = 2f\left(\frac{\sqrt{3} - \left(a + b - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2}\right)$$

Như vậy, ta cần chứng minh

$$2f\left(\frac{\sqrt{3} - \left(a + b - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2}\right) + f\left(a + b - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bất đẳng thức này đúng theo (2.1). Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Nhận xét. Bất đẳng thức trên vẫn đúng với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$.

♡♡♡

2 *Cho các số dương a, b, c thỏa $abc = 1$, chứng minh rằng*

$$\frac{a\sqrt{b + c}}{b + c + 1} + \frac{b\sqrt{c + a}}{c + a + 1} + \frac{c\sqrt{a + b}}{a + b + 1} \geq \sqrt{2}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a\sqrt{b + c}}{b + c + 1}\right)^2 \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b + c + 1)^2}{b + c}\right) \geq (a + b + c)^3$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$(a+b+c)^3 \geq 2\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c+1)^2}{b+c}$$

hay

$$\sum_{\text{cyc}} a^3 + 3\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} + 3\sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} + 6 \geq 4\sum_{\text{cyc}} ab + 4\sum_{\text{cyc}} a + 2\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta lại có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} \geq \sum_{\text{cyc}} ab, \qquad \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} \geq \sum_{\text{cyc}} ab, \qquad 2\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} \leq \frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} + \frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} VT - VP &\geq \sum_{\text{cyc}} a^3 + \frac{5}{2}\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} + \frac{5}{2}\sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} - 4\sum_{\text{cyc}} ab - 4\sum_{\text{cyc}} a + 6 \\ &\geq \sum_{\text{cyc}} a^3 + \sum_{\text{cyc}} ab - 4\sum_{\text{cyc}} a + 6 = \sum_{\text{cyc}} \left(a^3 - 4a + \frac{1}{a} + 2\right) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 4x + \frac{1}{x} + 2 + 2\ln x$ với $x > 0$, ta có

$$f'(x) = (x-1)\left(3x + 3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$$

Nếu $x \leq 1$ thì $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{x}$, nếu $x \geq 1$ thì $1 \geq \frac{1}{x}$, do đó

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Từ đây, ta dễ dàng kiểm tra được

$$f(x) \geq f(1) = 0 \qquad \forall x > 0$$

Hay

$$x^3 - 4x + \frac{1}{x} + 2 \geq -2\ln x \qquad \forall x > 0$$

Vậy

$$\sum_{\text{cyc}} \left(a^3 - 4a + \frac{1}{a} + 2\right) \geq -2\sum_{\text{cyc}} \ln a = 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

♡♡♡

3 *Với mọi số không âm a, b, c, ta có*

$$\sqrt{\frac{a}{4a+4b+c}} + \sqrt{\frac{b}{4b+4c+a}} + \sqrt{\frac{c}{4c+4a+b}} \leq 1$$

Lời giải. **Cách 1.** Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a}{4a+4b+c}} \leq \sqrt{3\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{4a+4b+c}}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a + b + c = 3$ và b là số hạng nằm giữa a và c, ta cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{a+b+1} \leq 1$$

hay

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc \le 4$$

Vì b là số hạng nằm giữa a và c nên

$$c(b-a)(b-c) \le 0$$

Suy ra

$$b^2c + c^2a \le abc + bc^2$$

Do đó

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc \le b(a+c)^2 \le \frac{1}{2}\left(\frac{2b + (a+c) + (a+c)}{3}\right)^3 = 4$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a}{4a+4b+c}}\right)^2 &= \left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a}{(4a+4b+c)(4a+b+4c)}} \cdot \sqrt{4a+b+4c}\right)^2 \\ &\le \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{(4a+4b+c)(4a+b+4c)}\right)\left(\sum_{\text{cyc}} (4a+b+4c)\right) \\ &= \frac{9(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+8(ab+bc+ca))}{(4a+4b+c)(4b+4c+a)(4c+4a+b)}\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$9(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+8(ab+bc+ca)) \le (4a+4b+c)(4b+4c+a)(4c+4a+b)$$

Hay

$$7\sum_{\text{cyc}} a^3 + 3\sum_{\text{cyc}} ab(a+b) \ge 39abc$$

Theo bất đẳng thức AM–GM thì

$$\sum_{\text{cyc}} a^3 \ge 3abc, \qquad \sum_{\text{cyc}} ab(a+b) \ge 6abc$$

Do đó ta có đpcm.

♡♡♡

4 *Cho các số dương a, b, c, chứng minh*

$$\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \le \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$$

Lời giải. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab+bc+ca}{a^2+bc} \le \sum_{\text{cyc}} \frac{a+b+c}{b+c}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a(a^2-b^2-c^2+ab+ac-bc)}{(b+c)(a^2+bc)} \ge 0$$

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a(a+2b+c)(a-b) + a(a+b+2c)(a-c)}{(b+c)(a^2+bc)} \ge 0$$

$$\sum_{\text{cyc}}(a-b)\left(\frac{a(a+2b+c)}{(b+c)(a^2+bc)}-\frac{b(2a+b+c)}{(a+c)(b^2+ca)}\right)\ge 0$$

$$\sum_{\text{cyc}} z(a^2-b^2)(a-b)\ge 0$$

Với

$$\begin{aligned}
x&=(a(b+c)(b^2+c^2)+2a^2(b^2+c^2)+3a^2bc+a^3(b+c)-b^2c^2)(a^2+bc)\\
y&=(b(c+a)(c^2+a^2)+2b^2(c^2+a^2)+2b^2ca+b^3(c+a)-c^2a^2)(b^2+ca)\\
z&=(c(a+b)(a^2+b^2)+2c^2(a^2+b^2)+2c^2ab+c^3(a+b)-a^2b^2)(c^2+ab)
\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c>0$, khi đó dễ thấy $x,y\ge 0$. Lại có

$$\begin{aligned}
y+z&\ge b(c+a)(c^2+a^2)(b^2+ca)-a^2b^2(c^2+ab)\\
&\ge a^3b(b^2+ca)-a^2b^2(c^2+ab)=a^2bc(a^2-bc)\ge 0
\end{aligned}$$

Chú ý rằng $a\ge b\ge c>0$ nên $(c^2-a^2)(c-a)\ge(a^2-b^2)(a-b)$. Từ đây, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=t>0, b=c\to 0$ và các hoán vị.

Cách 2. Ta có

$$\begin{aligned}
2\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{(b+c)^2}-\sum_{\text{cyc}}\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\cdot\frac{1}{b+c}&=\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{b+c}\left(\frac{2}{b+c}-\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\right)\\
&=\sum_{\text{cyc}}\frac{b(a-b)+c(a-c)}{(b+c)^2(ab+bc+ca)}=\sum_{\text{cyc}}\frac{a-b}{ab+bc+ca}\left(\frac{b}{(b+c)^2}-\frac{a}{(c+a)^2}\right)\\
&=\frac{1}{ab+bc+ca}\sum_{\text{cyc}}\frac{(ab-c^2)(a-b)^2}{(a+c)^2(b+c)^2}
\end{aligned}$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}
2\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{(a+c)^2}-\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a^2+bc}&=\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}-\frac{1}{c^2+ab}\right)\\
&=\sum_{\text{cyc}}\frac{ab(a-b)^2+(c^2-ab)^2}{(a+c)^2(b+c)^2(c^2+ab)}
\end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức tương đương

$$\begin{aligned}
0&\le\sum_{\text{cyc}}\frac{(a-b)^2}{(a+c)^2(b+c)^2}\left(\frac{ab}{c^2+ab}-\frac{ab-c^2}{ab+bc+ca}\right)+\sum_{\text{cyc}}\frac{(c^2-ab)^2}{(a+c)^2(b+c)^2(c^2+ab)}\\
&=\sum_{\text{cyc}}\frac{c(c^3+a^2b+b^2a)(a-b)^2}{(ab+bc+ca)(a+c)^2(b+c)^2(c^2+ab)}+\sum_{\text{cyc}}\frac{(c^2-ab)^2}{(a+c)^2(b+c)^2(c^2+ab)}
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Vậy ta có đpcm.

Nhận xét. Từ bất đẳng thức này, ta có

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{3}{2}\cdot\frac{(a+b+c)^2}{(ab+bc+ca)^2}$$

♡♡♡

5 *Chứng minh rằng với mọi số dương a,b,c ta luôn có*

$$\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}+\frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{c^3}{2c^2-ca+2a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

Lời giải. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{\text{cyc}} S_c(a-b)^2 \ge 0$$

trong đó

$$S_a = \frac{2c-b}{2b^2-bc+2c^2}, \qquad S_b = \frac{2a-c}{2c^2-ca+2a^2}, \qquad S_c = \frac{2b-a}{2a^2-ab+2b^2}$$

Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $a \ge b \ge c > 0$, khi đó, dễ thấy $S_b \ge 0$. Ta sẽ chứng minh

$$S_b + 2S_c \ge 0 \tag{1}$$

$$a^2S_b + 2b^2S_a \ge 0 \tag{2}$$

Thật vậy, ta có

$$(1) \Leftrightarrow 6a^2b + 4ab^2 - 3abc + 8bc^2 - 4ac^2 - 2b^2c \ge 0 \text{ (đúng do } a \ge b \ge c)$$

$$(2) \Leftrightarrow f(a) = \frac{a^2(2a-c)}{2c^2-ca+2a^2} + \frac{2b^2(2c-b)}{2b^2-bc+2c^2} \ge 0$$

Lại có

$$f'(a) = \frac{a(4a^3-4a^2c+13ac^2-4c^3)}{(2c^2-ca+2a^2)^2} \ge 0$$

Do đó, $f(a)$ là hàm đồng biến. Suy ra,

$$f(a) \ge f(b) = \frac{3b^2c}{2b^2-bc+2c^2} \ge 0$$

Các bất đẳng thức (1) và (2) được chứng minh.

Từ các bất đẳng thức này và với chú ý rằng $a \ge b \ge c > 0$ nên $(a-c)^2 \ge \max\left\{\frac{a^2}{b^2}\cdot(b-c)^2, (a-b)^2\right\}$, ta có

$$\begin{aligned} 2\sum_{\text{cyc}} S_c(a-b)^2 &= \left(S_b(c-a)^2 + 2S_a(b-c)^2\right) + \left(S_b(c-a)^2 + 2S_c(a-b)^2\right) \\ &\ge \frac{(b-c)^2}{b^2}(a^2S_b + 2b^2S_a) + (a-b)^2(S_b + 2S_c) \ge 0 \end{aligned}$$

Trường hợp 2. $c \ge b \ge a > 0$, dễ thấy $S_c, S_a \ge 0$. Nếu $2a \ge c$ thì bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng. Xét trường hợp ngược lại $c \ge 2a$, tức là $S_b \le 0$. Xét 2 trường hợp nhỏ

Trường hợp 2.1. $2b \ge c + a$, ta có

$$S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0 \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow m(b) = \frac{(a-b)^2(2b-a)}{2a^2-ab+2b^2} + \frac{(c-a)^2(2a-c)}{2c^2-ca+2a^2} \ge 0$$

$$m'(b) = \frac{(b-a)(4b^3+9a^2b-7a^3)}{(2a^2-ab+2b^2)^2} \ge 0$$

Do đó, $m(b)$ là hàm đồng biến. Suy ra,

$$m(b) \ge m\left(\frac{a+c}{2}\right) = \frac{a(a-c)^2(16a^2-2ac+c^2)}{2(4a^2+ac+c^2)(2a^2-ac+2c^2)} \ge 0$$

Vậy (3) đúng. Do đó,

$$\sum_{\text{cyc}} S_c(a-b)^2 \geq S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Trường hợp 2.2. $c + a \geq 2b$.

Trường hợp 2.2.1. $2b - a \geq 4a$, ta sẽ chứng minh

$$S_c + 3S_b \geq 0 \tag{4}$$

$$S_a + \frac{3}{2}S_b \geq 0 \tag{5}$$

Thật vậy

$$(4) \Leftrightarrow g(c) = \frac{2b-a}{2a^2-ab+2b^2} + \frac{3(2a-c)}{2c^2-ca+2a^2} \geq 0$$

Ta có

$$g'(c) = \frac{6c(c-4a)}{(2c^2-ca+2a^2)^2} \geq 0$$

Do đó, $g(c)$ là hàm đồng biến. Suy ra,

$$g(c) \geq g(2b-a) = \frac{4b^3-4ab^2-a^2b+13a^3}{(2a^2-ab+2b^2)(5a^2-10ab+8b^2)} \geq 0$$

$$(5) \Leftrightarrow h(a) = \frac{4c-2b}{2b^2-bc+2c^2} + \frac{6a-3c}{2c^2-ca+2a^2} \geq 0$$

$$h'(a) = \frac{3(3c^2+4ca-4a^2)}{(2c^2-ca+2a^2)^2} \geq 0$$

Do đó, $h(a)$ là hàm đồng biến. Suy ra,

++, Nếu $c \geq 2b$ thì

$$h(a) \geq h(0) = \frac{(c-2b)(2c+3b)}{2c(2c^2-bc+2b^2)} \geq 0$$

++, Nếu $2b \geq c$ thì

$$h(a) \geq h(2b-c) = \frac{(2b-c)(4b^2+13bc-2c^2)}{(2b^2-bc+2c^2)(8b^2-10bc+5c^2)} \geq 0$$

Tóm lại, ta luôn có $h(a) \geq 0$.

Từ (4) và (5) với chú ý rằng $(c-a)^2 \leq 3(b-a)^2 + \frac{3}{2}(b-c)^2$, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} S_c(a-b)^2 \geq (S_c+3S_b)(a-b)^2 + \left(S_a + \frac{3}{2}S_b\right)(b-c)^2 \geq 0$$

Trường hợp 2.2.2. $2b - a \leq 4a \Leftrightarrow a \geq \frac{2}{5}b$, ta có

$$S_a + S_b + S_c \geq 0 \tag{6}$$

$$S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \geq 0 \tag{7}$$

(6) hiển nhiên đúng vì theo (5), ta có

$$S_a + S_b + S_c = S_a + \left(\frac{3}{2}S_b + S_c\right) - \frac{1}{2}S_b \geq 0$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh (7), ta có

$$\begin{aligned}(7) \Leftrightarrow k(c) = 4(ab^3+bc^3+ca^3)+7abc(a+b+c)-2(a^3b+b^3c+c^3a)\\ -6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \ge 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k'(c) &= 12bc^2+4a^3+14abc+7ab(a+b)-2b^3-6ac^2-12c(a^2+b^2)\\ k''(c) &= 24bc-12ac+14ab-12a^2-12b^2\\ &\ge 24b^2-12ab+14ab-12a^2-12b^2 = 12b^2+2ab-12a^2 \ge 0\end{aligned}$$

Do đó, $k'(c)$ là hàm đồng biến. Suy ra,

$$k'(c) \ge k'(b) = 4a^3-5a^2b+15ab^2-2b^3 \ge 0 \text{ (do } a \ge \frac{2}{5}b)$$

Suy ra, $k(c)$ là hàm đồng biến. Do đó,

$$k(c) \ge k(b) = b(2a^3-5a^2b+16ab^2-4b^3) \ge 0 \text{ (do } a \ge \frac{2}{5}b)$$

Từ đây, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

6 *Cho các số không âm a,b,c thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}+\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{4}}+\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{4}} \le \sqrt{3}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(|a-b|+|b-c|+|c-a|)$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c \ge 0$. Đặt $a+b=2t, a-b=2m, k=\frac{1}{4}$ thì do giả thiết, ta có $t \ge m \ge t-c \ge 0$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned}f(m) = \sqrt{t+m+k(m+c-t)^2}+\sqrt{t-m+k(m+t-c)^2}+\sqrt{c+4km^2}\\ -\left(2-\sqrt{3}\right)(t+m-c) \le \sqrt{3}\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}f''(m) &= \frac{4k(2t-c)-1}{4\left(t+m+k(m+c-t)^2\right)^{3/2}}+\frac{4k(2t-c)-1}{4\left(t-m+k(m+t-c)^2\right)^{3/2}}+\frac{4kc}{\left(c+4km^2\right)^{3/2}}\\ &= -\frac{c}{2\left(a+\frac{1}{4}(b-c)^2\right)^{3/2}}-\frac{c}{2\left(b+\frac{1}{4}(c-a)^2\right)^{3/2}}+\frac{c}{\left(c+\frac{1}{4}(a-b)^2\right)^{3/2}}\end{aligned}$$

Chú ý rằng $a \ge b \ge c \ge 0$ nên

$$\begin{aligned}a+\frac{1}{4}(b-c)^2-c-\frac{1}{4}(a-b)^2 = \frac{3}{4}(a-c)(b+1) \ge 0\\ b+\frac{1}{4}(c-a)^2-c-\frac{1}{4}(a-b)^2 = \frac{3}{4}(b-c)(a+1) \ge 0\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{4}(b-c)^2\right)^{3/2} \ge \left(c+\frac{1}{4}(a-b)^2\right)^{3/2} \ge 0\\ \left(b+\frac{1}{4}(c-a)^2\right)^{3/2} \ge \left(c+\frac{1}{4}(a-b)^2\right)^{3/2} \ge 0\end{aligned}$$

Do đó,

$$f''(m) \geq -\frac{c}{2\left(c+\frac{1}{4}(a-b)^2\right)^{3/2}} - \frac{c}{2\left(c+\frac{1}{4}(a-b)^2\right)^{3/2}} + \frac{c}{\left(c+\frac{1}{4}(a-b)^2\right)^{3/2}} = 0$$

Suy ra, $f(m)$ là hàm lồi. Do đó,

$$f(m) \leq \max\{f(0), f(t-c)\}$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$\max\{f(0), f(t-c)\} \leq \sqrt{3}$$

Điều này có nghĩa là ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đã cho trong trường hợp 3 số a, b, c có 2 số bằng nhau, không mất tính tổng quát, giả sử $b = c$. Ta cần chứng minh

$$\sqrt{a} + 2\sqrt{b + \frac{(a-b)^2}{4}} \leq \sqrt{3} + \left(2-\sqrt{3}\right)|a-b|$$

Hay

$$\sqrt{\left(\frac{3a-1}{2}\right)^2 + 2(1-a)} \leq \sqrt{3} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)|3a-1| - \sqrt{a}$$

Đặt $t = \sqrt{3a}$ thì ta có $t \leq \sqrt{3}$, ta cần chứng minh

$$\sqrt{3t^4 - 14t^2 + 27} \leq 6 - 2t + \left(2\sqrt{3}-2\right)|t^2-1|$$

Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $t \geq 1$, ta có bất đẳng thức tương đương

$$\sqrt{3t^4 - 14t^2 + 27} \leq 6 - 2t + \left(2\sqrt{3}-2\right)(t^2-1)$$

Hay

$$2(t-1)\left(t-\sqrt{3}\right)\left(\left(6\sqrt{3}-9\right)t^2 + \left(3+\sqrt{3}\right)t + 18 - 11\sqrt{3}\right) \leq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng do $\sqrt{3} \geq t \geq 1$.

Trường hợp 2. $t \leq 1$, bất đẳng thức trở thành

$$\sqrt{3t^4 - 14t^2 + 27} \leq 6 - 2t - \left(2\sqrt{3}-2\right)(t^2-1)$$

Hay

$$2(t-1)\left(\left(6\sqrt{3}-9\right)t^3 + \left(2\sqrt{3}-3\right)t^2 + \left(2\sqrt{3}-9\right)t + 6\sqrt{3}-3\right) \leq 0$$

Bất đẳng thức này cũng đúng do $1 \geq t \geq 0$. Bài toán được giải quyết hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ hoặc $a = 1, b = c = 0$ và các hoán vị.

Nhận xét. Ta có 1 kết quả "yếu" hơn nhưng khá "đẹp" là

$$\sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{4}} + \sqrt{b + \frac{(c-a)^2}{4}} + \sqrt{c + \frac{(a-b)^2}{4}} \leq 2$$

với mọi $a, b, c \geq 0, a + b + c = 1$.

♡♡♡

7 *Cho các số dương a, b, c thỏa $a + b + c = 3$, chứng minh bất đẳng thức*

$$a^{3/2}b + b^{3/2}c + c^{3/2}a \leq 3$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$a^{3/2}b + b^{3/2}c + c^{3/2}a \le \sqrt{(ab+bc+ca)(a^2b+b^2c+c^2a)}$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$(ab+bc+ca)(a^2b+b^2c+c^2a) \le 9$$

Hay

$$(ab+bc+ca)(a+b+c)(a^2b+b^2c+c^2a) \le 27$$

Hay

$$(ab+bc+ca)\left(\sum_{\text{cyc}} a^3b + \sum_{\text{cyc}} a^2b^2 + 3abc\right) \le 27$$

Chú ý rằng $\frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}}(a^2-c^2-2ab+bc+ca)^2 \ge 0$ nên

$$\sum_{\text{cyc}} a^3b \le \frac{1}{3}\left(\sum_{\text{cyc}} a^2\right)^2$$

Ta cần chứng minh

$$(ab+bc+ca)\left(\left(\sum_{\text{cyc}} a^2\right)^2 + 3\sum_{\text{cyc}} a^2b^2 + 9abc\right) \le 81$$

Đặt $x = ab+bc+ca$ thì theo bất đẳng thức AM–GM và Schur, ta có $x \le 3, 3abc \ge 4x-9$, bất đẳng thức trở thành

$$x((9-2x)^2 + 3x^2 - 9abc) \le 81$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$x((9-2x)^2 + 3x^2 - 3(4x-9)) \le 81$$

Hay

$$(x-3)(7x^2-27x+27) \le 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng do $3 \ge x \ge 0$. Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

♡♡♡

8 *Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, ta có*

$$\frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2} + \frac{bc}{4b^2+c^2+4a^2} + \frac{ca}{4c^2+a^2+4b^2} \le \frac{1}{3}$$

Lời giải. Dễ thấy trong 3 số a, b, c luôn tồn tại ít nhất 2 số cùng dấu, giả sử $bc \ge 0$, nếu $ab \le 0, ac \le 0$ thì

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2} \le \frac{bc}{4b^2+c^2+4a^2} \le \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$$

Như vậy, ta chỉ cần xét trường hợp các số a, b, c cùng dấu, và do đó, ta chỉ cần xét $a, b, c \ge 0$ là đủ. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a^2+b^2+c^2=3$ và b là số hạng nằm giữa a và c, bất đẳng thức trở thành

$$4\sum_{\text{cyc}} ab + 4\sum_{\text{cyc}} ab^3 + abc\sum_{\text{cyc}} ab^2 + a^2b^2c^2 \le 16 + 4\sum_{\text{cyc}} a^2b^2$$

Vì b là số hạng nằm giữa a và c nên

$$a(b-a)(b-c) \le 0$$

Suy ra

$$ab^2 + a^2c \le abc + a^2b$$

Do đó

$$\sum_{cyc} ab^2 \le b(a^2+c^2) + abc = 2 - (b-1)^2(b+2) + abc \le 2 + abc$$

Sử dụng kết quả bài toán trước, ta có

$$\sum_{cyc} ab^3 \le \frac{1}{3}\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 = 3$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$4\sum_{cyc} ab + abc(2+abc) + a^2b^2c^2 \le 4 + 4\sum_{cyc} a^2b^2$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$2abc \le a^2b^2c^2 + 1$$

Do đó, ta phải chứng minh

$$P(a,b,c) = 4\sum_{cyc} a^2b^2 - 4\sum_{cyc} ab - 3a^2b^2c^2 + 3 \ge 0$$

Vì đây là một bất đẳng thức đối xứng với a, b, c nên không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a,b,c\}$ suy ra $a \ge 1, b^2+c^2 \le 2$, ta có

$$\begin{aligned} P(a,b,c) &- P\left(a, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right) \\ &= (b-c)^2\left(2 + \frac{4a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}+b+c} + \frac{(3a^2-4)(b+c)^2}{4}\right) \end{aligned}$$

Ta có

$$2 + \frac{(3a^2-4)(b+c)^2}{4} \ge 2 - \frac{(b+c)^2}{4} \ge 2 - \frac{b^2+c^2}{2} > 0$$

Do đó

$$P(a,b,c) \ge P\left(a, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$P(a,t,t) \ge 0$$

với $a \ge t \ge 0, a^2 + 2t^2 = 3$.

Hay

$$(a^2+2t^2)^3 + 12t^2(a^2+2t^2)(2a^2+t^2) \ge 27a^2t^4 + 4t(2a+t)(a^2+2t^2)^2$$

Hay

$$(a-t)^2(a^2(a-3t)^2 + 4a^2t^2 + 16t^4) \ge 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

♡♡♡

9 *Cho các số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=3$, chứng minh*

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a+1)(b+1)}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{(b+1)(c+1)}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{(c+1)(a+1)}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Lời giải. Bình phương 2 vế rồi nhân 2 vế với $(a+1)(b+1)(c+1)$, ta được bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc}(a^2+b^2)(1+c)+2\sum_{cyc}\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)(a+1)(b+1)} \geq \frac{9}{2}(a+1)(b+1)(c+1)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz thì

$$\sum_{cyc}\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)(a+1)(b+1)} \geq \sum_{cyc}(c^2+ab)\left(1+\sqrt{ab}\right)$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc}(a^2+b^2)(1+c)+2\sum_{cyc}(c^2+ab)\left(1+\sqrt{ab}\right) \geq \frac{9}{2}(a+1)(b+1)(c+1)$$

Hay

$$8\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab+4\sum_{cyc}\sqrt{ab}(c^2+ab) \geq 36+15abc$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM và Schur, ta có

$$4\sum_{cyc}\sqrt{ab}(c^2+ab)-15abc \geq 9abc \geq 12\sum_{cyc}ab-27$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$8\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab+12\sum_{cyc}ab-27 \geq 36$$

Hay

$$ab+bc+ca \leq 3$$

Bất đẳng thức này đúng theo bất đẳng thức AM–GM. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

♡♡♡

10 *Với mọi $a \geq b \geq c \geq 0$, đặt*

$$P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

$$Q=\frac{2(b+c)-a}{4a+b+c}+\frac{2(c+a)-b}{4b+c+a}+\frac{2(a+b)-c}{4c+a+b}$$

Chứng minh rằng

1. *Nếu $a+c \geq 2b$ thì $P \geq Q$.*
2. *Nếu $a+c \leq 2b$ thì $P \leq Q$.*

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$.

(1) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{3a-1}{(3a+1)(1-a)} \geq 0$$

Hay
$$\sum_{\text{cyc}} z(a-b)^2 \ge 0$$
với $x = (1-9a^2)(1-a), y = (1-9b^2)(1-b), z = (1-9c^2)(1-c)$.
Chú ý rằng $a \ge b \ge c, a+c \ge 2b$ nên
$$b \le \frac{1}{3}, \qquad y, z \ge 0, \qquad a-c \ge 2(b-c) \ge 0, \qquad a-b \ge b-c \ge 0$$
Do đó, ta chỉ cần chứng minh
$$x + 4y + z \ge 0$$
Hay
$$F(a,b,c) = 9(a^3+c^3) - 9(a^2+c^2) + 36b^3 - 36b^2 - 3b + 5 \ge 0$$
Ta có
$$F(a,b,c) = \frac{(1-3b)(11+30b-45b^2+9(a-c)^2)}{4} \ge 0$$
(2) Bằng biến đổi tương tự, ta có bất đẳng thức tương đương
$$\sum_{\text{cyc}} S_c(a-b)^2 \ge 0$$
với $S_a = (9a^2-1)(1-a), S_b = (9b^2-1)(1-b), S_c = (9c^2-1)(1-c)$.
Do $a \ge b \ge c, 2b \ge a+c$ nên
$$\frac{1}{2} \ge b \ge \frac{1}{3}, \qquad S_a, S_b \ge 0, \qquad a-c \ge 2(a-b) \ge 0, \qquad b-c \ge a-b \ge 0$$
Như vậy, ta chỉ cần chứng minh
$$S_a + 4S_b + S_c \ge 0$$
Hay
$$G(a,b,c) = -9(a^3+c^3) + 9(a^2+c^2) - 36b^3 + 36b^2 + 3b - 5 \ge 0$$
Ta có
$$G(a,b,c) = \frac{(3b-1)(11+30b-45b^2+9(a-c)^2)}{4} \ge 0$$
Bài toán được giải quyết hoàn toàn.
Đẳng thức ở cả 2 bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2b = a+c$.

♡♡♡

11 *Cho các số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=1$, đặt $x = a^2+b^2+c^2$, chứng minh bất đẳng thức*
$$\sqrt{1+2a^2-x} + \sqrt{1+2b^2-x} + \sqrt{1+2c^2-x} \ge \sqrt{11-9x}$$

Lời giải. Bình phương 2 vế rồi thu gọn, ta có thể viết lại bất đẳng thức như sau
$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{(1+a^2-b^2-c^2)(1+b^2-c^2-a^2)} \ge 8\sum_{\text{cyc}} ab$$
Sử dụng bất đẳng thức GM-HM, ta có
$$\sqrt{(1+a^2-b^2-c^2)(1+b^2-c^2-a^2)} \ge \frac{(1+a^2-b^2-c^2)(1+b^2-c^2-a^2)}{1-c^2}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(1+a^2-b^2-c^2)(1+b^2-c^2-a^2)}{1-c^2} \geq 8\sum_{\text{cyc}} ab$$

Hay

$$2\sum_{\text{cyc}} \frac{c(a-b)^2}{1+c} \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng, vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=1, b=c=0$ và các hoán vị.

♡♡♡

12 *Chứng minh rằng với mọi $a,b,c>0$, ta có*

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{3}{2(abc)^{2/3}}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $abc=1$. Khi đó, tồn tại các số dương x,y,z sao cho $a=\frac{x}{y}, b=\frac{z}{x}, c=\frac{y}{z}$, bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{y^2}{x^2+yz} \geq \frac{3}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{y^2}{x^2+yz} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^3y+y^3z+z^3x}$$

Mặt khác, ta lại có

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 3(x^3y+y^3z+z^3x) = \frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}}(x^2-z^2-2xy+yz+zx)^2 \geq 0$$

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) = \frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}}(x^2-y^2)^2 \geq 0$$

Nên từ đây, ta dễ dàng suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

13 *Chứng minh rằng nếu $a,b,c>0$ thì*

$$\frac{1}{a\sqrt{a+b}} + \frac{1}{b\sqrt{b+c}} + \frac{1}{c\sqrt{c+a}} \geq \frac{3}{\sqrt{2abc}}$$

Lời giải. Tương tự bài trên, ta cũng đưa bài toán về chứng minh rằng với mọi $x,y,z>0$ thì

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x(x^2+yz)}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} VT &\geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{xy(x^2+yz)}+\sqrt{yz(y^2+zx)}+\sqrt{zx(z^2+xy)}} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)}} \end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM–GM thì

$$\begin{aligned}&8(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)\\&\qquad\le (x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx))^2 \le \frac{16}{9}(x+y+z)^2\end{aligned}$$

Từ đây, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

14 *Cho các số dương x,y,z thỏa $x^2+y^2+z^2 \ge 3$, chứng minh rằng*

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \ge 0$$

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho được viết lại như sau

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x^5+y^2+z^2} \le \frac{3}{x^2+y^2+z^2}$$

Từ đây, ta suy ra được chỉ cần xét trường hợp $x^2+y^2+z^2=3$ là đủ, khi đó, bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x^5-x^2+3} \le 1$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$x^5 = \frac{x^6}{x} \ge \frac{2x^6}{x^2+1}$$

Đặt $a=x^2, b=y^2, c=z^2$ thì ta có $a+b+c=3$ và ta cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\frac{2a^3}{a+1}-a+3} \le 1$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a+1}{2a^3-a^2+2a+3} \le 1$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-1)^2(-2a^2+3a+3)}{2a^3-a^2+2a+3} \ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$, suy ra $a \ge 1 \ge c$. Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $b+c \ge 1$, suy ra $a \le 2$, khi đó, ta có

$$-2a^2+3a+3>0, \qquad -2b^2+3b+3>0, \qquad -2c^2+3c+3>0$$

Nên kết quả bài toán là hiển nhiên.

Trường hợp 2. $b+c \le 1$, suy ra $a \ge 2$, ta có

$$\begin{aligned}(2a^3-a^2+2a+3)-5(a+1) &= 2a^3-a^2-3a-2 = a^3\left(2-\frac{1}{a}-\frac{3}{a^2}-\frac{2}{a^3}\right)\\&\ge a^3\left(2-\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}-\frac{2}{2^3}\right)=\frac{1}{2}a^3>0\end{aligned}$$

Suy ra $\frac{a+1}{2a^3-a^2+2a+3} \le \frac{1}{5}$. Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{b+1}{2b^3-b^2+2b+3} + \frac{c+1}{2c^3-c^2+2c+3} \le \frac{4}{5}$$

Điều này luôn đúng vì với mọi $1 \ge x \ge 0$, ta có

$$\frac{x+1}{2x^3-x^2+2x+3} \le \frac{2}{5}$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương

$$4x^3 \ge (x+1)(2x-1)$$

Nếu $x \le \frac{1}{2}$ thì ta có ngay đpcm, nếu $x \ge \frac{1}{2}$ thì

$$\begin{aligned} 4x^3 - (x+1)(2x-1) &\ge 4x^3 - 2(2x-1) = 2(2x^3 - 2x + 1) \\ &\ge 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x-1)^2 \ge 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

♡♡♡

15 *Cho $n \ge 3$ và $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số không âm thỏa $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \ge a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1$$

Lời giải. Đặt $f_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Nếu $a_n \le \frac{1}{\sqrt{3}}$ thì

$$\begin{aligned} & f_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) - f_{n-1}\left(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, \sqrt{a_{n-1}^2 + a_n^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a_{n-1} + a_n - \sqrt{a_{n-1}^2 + a_n^2}\right) + (a_{n-2} + a_1)\sqrt{a_{n-1}^2 + a_n^2} - a_{n-1}(a_{n-2} + a_n) - a_na_1 \\ &\ge \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - a_n\right)\left(a_{n-1} + a_n - \sqrt{a_{n-1}^2 + a_n^2}\right) \ge 0 \end{aligned}$$

Suy ra

$$f_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ge f_{n-1}\left(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, \sqrt{a_{n-1}^2 + a_n^2}\right)$$

Nếu $a_n \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$ thì ta có $a_1 \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$, suy ra $a_{n-1} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$, do đó

$$\begin{aligned} & f_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) - f_{n-1}\left(a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}, \sqrt{a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2}, a_n\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a_{n-2} + a_{n-1} - \sqrt{a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2}\right) + a_{n-3}\left(\sqrt{a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2} - a_{n-2}\right) \\ &\quad + a_n\left(\sqrt{a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2} - a_{n-1}\right) - a_{n-2}a_{n-1} \ge a_{n-2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - a_{n-1}\right) \ge 0 \end{aligned}$$

Suy ra

$$f_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ge f_{n-1}\left(a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}, \sqrt{a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2}, a_n\right)$$

Từ đây, ta suy ra được ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $n = 3$ là đủ nhưng trong trường hợp này, bất đẳng thức là hiển nhiên nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n = 3$ và $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

♡♡♡

16 *Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \ge \sqrt{3}+1$$

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh kết quả sau với mọi $a, b, c > 0$

$$(a+b+c)^2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \ge 9(a^2+b^2+c^2)$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{\text{cyc}} S_c(a-b)^2 \ge 0$$

trong đó

$$S_a = \frac{b}{c}+\frac{a}{b}+\frac{2a}{c}-\frac{5}{2}, \qquad S_b = \frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{2b}{a}-\frac{5}{2}, \qquad S_c = \frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{2c}{b}-\frac{5}{2}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Nếu $c \ge b$ thì ta có $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$ nên không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét $a \ge b \ge c > 0$ là đủ, khi đó, dễ thấy $S_a \ge 0$. Ta sẽ chứng minh

$$S_a + 2S_b \ge 0, \qquad S_c + 2S_b \ge 0, \qquad S_b + S_c \ge 0$$

Thật vậy, ta có

$$S_a + 2S_b = 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\right)+\frac{3b}{c}-\frac{15}{2} \ge 4+4+3-\frac{15}{2} > 0$$

$$S_c + 2S_b = 2\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\right)+\frac{3c}{a}-\frac{15}{2} \ge 4+4-\frac{15}{2} > 0$$

$$S_b + S_c = \left(\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}\right)+\left(\frac{b}{2c}+\frac{2c}{b}\right)+\left(\frac{b}{2c}+\frac{2c}{a}\right)-5 \ge \frac{a}{b}+2\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{2b}{a}+2-5$$
$$= \left(\frac{a}{2b}+\frac{2b}{a}\right)+\left(\frac{a}{2b}+\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)-3 \ge 2+\frac{3}{\sqrt[3]{2}}-3 > 0$$

Từ đây, ta có

+, Nếu $S_b \le 0$ thì

$$\sum_{\text{cyc}} S_c(a-b)^2 \ge (S_a+2S_b)(b-c)^2+(S_c+2S_b)(a-b)^2 \ge 0$$

+, Nếu $S_b \ge 0$ thì

$$\sum_{\text{cyc}} S_c(a-b)^2 \ge (S_c+S_b)(a-b)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức trên được chứng minh, sử dụng bất đẳng thức này, ta suy ra được, ta chỉ cần chứng minh

$$3\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \ge \sqrt{3}+1$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \le 1$, ta cần chứng minh

$$\frac{3}{\sqrt{2x^2+1}}+x \ge \sqrt{3}+1$$

Dễ dàng kiểm tra được bất đẳng thức này đúng với mọi $1 \ge x \ge 0$, vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

♡♡♡

17 *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$, ta có*

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{8(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 11$$

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh kết quả sau với mọi $x, y, z > 0$ thỏa $xyz = 1$

$$x^2+y^2+z^2+6\geq \frac{3}{2}\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $x = \min\{x, y, z\}$. Đặt $t = \sqrt{yz}$ và

$$P(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+6-\frac{3}{2}\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Ta có

$$\begin{aligned}P(x,y,z)-P(x,t,t)&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2\left(2\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2-3-\frac{3}{bc}\right)\\&\geq\frac{1}{2}\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2(8-3-3)\geq 0\end{aligned}$$

Lại có

$$P(x,t,t)=P\left(\frac{1}{t^2},t,t\right)=\frac{(t-1)^2((t^2-2t-1)^2+t^2+1)}{2t^4}\geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Trở lại bài toán của ta, sử dụng bất đẳng thức trên với $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$, ta suy ra được ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{3}{2}\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{8(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 17$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}}S_c(a-b)^2\geq 0$$

trong đó

$$S_a=\frac{3}{bc}-\frac{8}{a^2+b^2+c^2},\qquad S_b=\frac{3}{ca}-\frac{8}{a^2+b^2+c^2},\qquad S_c=\frac{3}{ab}-\frac{8}{a^2+b^2+c^2}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó, dễ thấy $S_a \geq S_b \geq S_c$, lại có

$$S_b+S_c=\frac{3(b+c)}{abc}-\frac{16}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{6}{a\sqrt{bc}}-\frac{16}{a^2+2bc}\geq\frac{6}{a\sqrt{bc}}-\frac{16}{2a\sqrt{2bc}}>0$$

Từ đây, ta dễ dàng suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Chú ý rằng $\left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)^2+1\geq\frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}$, ta suy ra

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+4\left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)^2\geq 7$$

Kết quả này được tìm ra bởi bạn Nguyễn Anh Cường và đã được đưa lên http://mathnfriend.org/

♡♡♡

18 *Chứng minh rằng với mọi số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, ta có*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)\geq\left(\sum_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)\right)\left(\sum_{i=1}^n\frac{a_i^2b_i}{a_i+b_i}\right)$$

Lời giải. Đặt $f_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = VT - VP$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đã cho bằng quy nạp. Với $n := 1$ thì bất đẳng thức là hiển nhiên, giả sử bất đẳng thức đúng với $n := n$, khi đó, sử dụng giả thiết quy nạp, ta có

$$\begin{aligned} f_{n+1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) &\geq f_{n+1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) - f_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ &= \frac{1}{a_{n+1} + b_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_{n+1}b_i - b_{n+1}a_i)^2(a_{n+1}a_i + b_{n+1}a_i + a_{n+1}b_i)}{a_i + b_i} \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho cũng đúng khi $n := n + 1$ nên theo nguyên lý quy nạp, nó đúng với mọi n.

♡♡♡

19 *Chứng minh rằng với các số thực a, b, c đôi một khác nhau, ta có*

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)\left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}\right) \geq \frac{27}{4}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \min\{a, b, c\}$, đặt $b = a + x, c = a + y$ thì ta có $x, y > 0, x \neq y$ (do a, b, c phân biệt nhau) và bất đẳng thức trở thành

$$(x^2 - xy + y^2)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x-y)^2}\right) \geq \frac{27}{4}$$

Lại đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1$, dễ thấy $t > 1$, bất đẳng thức được viết lại như sau

$$\frac{4t^3}{t-1} \geq 27$$

Hay

$$(2t - 3)^2(t + 3) \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng, vậy ta có đpcm.

♡♡♡

20 *Cho các số không âm a, b, c, d thỏa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{3 - abc} + \frac{1}{3 - bcd} + \frac{1}{3 - cda} + \frac{1}{3 - dab} \leq 2$$

Lời giải. Dễ dàng chứng minh được với mọi $\frac{8}{3\sqrt{3}} \geq x \geq 0$, ta có

$$\frac{2}{3 - x} \leq \frac{5x^2 - 3x + 12}{14}$$

Sử dụng bất đẳng thức này với chú ý là $\max\{abc, bcd, cda, dab\} \leq \frac{8}{3\sqrt{3}}$, ta suy ra được ta chỉ cần chứng minh

$$5(a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 + c^2d^2a^2 + d^2a^2b^2) - 3(abc + bcd + cda + dab) \leq 8$$

Có nhiều cách chứng minh cho bất đẳng thức này, xin được giới thiệu với các bạn cách chứng minh sau dựa vào kỹ thuật hàm lồi. Đặt $t^2 = \frac{a^2+b^2}{2}, k^2 = \frac{c^2+d^2}{2}$ và $x = ab, y = cd$ thì ta có $t^2 \geq x \geq 0, k^2 \geq y \geq 0$, bất đẳng thức được viết lại như sau

$$f(x) = 10x^2k^2 + 10y^2t^2 - 3x\sqrt{2y + 2k^2} - 3y\sqrt{2x + 2t^2} - 8 \leq 0$$

Ta có
$$f''(x) = 20k^2 + \frac{3y}{(2x+2t^2)^{3/2}} \ge 0$$
Suy ra $f(x)$ là hàm lồi, do đó
$$f(x) \le \max\{f(t^2), f(0)\}$$
Ta có
$$f(0) = \left(yt\sqrt{2}+1\right)\left(5yt\sqrt{2}-8\right) \text{ (do } yt\sqrt{2} \le \frac{8}{3\sqrt{3}} < \frac{8}{5})$$
$$f(t^2) = 10y^2t^2 - 6yt + 10k^2t^2 - 3t\sqrt{2y+2k^2} - 8 = g(y)$$
Tương tự như trên, ta cũng có $g(y)$ là hàm lồi nên
$$g(y) \le \max\{g(k^2), g(0)\}$$
Ta cũng có
$$g(0) = \left(kt\sqrt{2}+1\right)\left(5kt\sqrt{2}-8\right) \text{ (do } kt\sqrt{2} \le \frac{8}{3\sqrt{3}} < \frac{8}{5})$$
$$g(t^2) = 4(kt-1)(5kt+1) \le 0 \text{ (do } kt \le \frac{k^2+t^2}{2} = 1)$$
Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

♡♡♡

21 *Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}}$$
Lời giải. Nhận xét rằng ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đã cho trong trường hợp $a \ge b \ge c$ là đủ, khi đó, ta có $\frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \ge \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$. Mặt khác, sử dụng kết quả bài toán **17**, ta có
$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b^2} + 6 \ge \frac{3}{2}\sum_{cyc} \frac{a^2+b^2}{ab}$$
Suy ra
$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{b}\right)^2 = \sum_{cyc}\frac{a^2}{b^2} + \sum_{cyc}\frac{b}{a} + \sum_{cyc}\frac{b}{a} \ge \frac{3}{2}\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{ab} - 6 + \sum_{cyc}\frac{a}{b} + \sum_{cyc}\frac{b}{a} = \frac{5}{2}\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{ab} - 6$$
Ta cần chứng minh
$$\frac{5}{2}\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{ab} - 6 \ge \frac{9(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}$$
Hay
$$\sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{5}{ab} - \frac{9}{ab+bc+ca}\right) \ge 0$$
Hay
$$\sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{5c}{a} + \frac{5c}{b} - 4\right) \ge 0$$
Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c > 0$, khi đó, ta có
$$\frac{5a}{b} + \frac{5a}{c} - 4 \ge \frac{5b}{c} + \frac{5b}{a} - 4 \ge \frac{5c}{a} + \frac{5c}{b} - 4$$

Lại có

$$\left(\frac{5b}{c}+\frac{5b}{a}-4\right)+\left(\frac{5c}{a}+\frac{5c}{b}-4\right)\geq \frac{5(b^2+c^2)}{bc}-8\geq 2>0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

22 *Cho các số không âm a,b,c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{7\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c}+\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{a^3+b^3+c^3}\geq 8$$

Lời giải. Sử dụng kết quả bài toán **16**, ta có

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\geq \frac{9(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

Suy ra

$$a^2b+b^2c+c^2a\geq \frac{9abc(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{7\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c}+\frac{9abc(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2(a^3+b^3+c^3)}\geq 8$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$, đặt $x=ab+bc+ca$ thì ta có $\frac{1}{3}\geq x\geq 0$. Hơn nữa, theo bất đẳng thức Schur, ta suy $abc\geq \frac{4x-1}{9}$, do đó

$$\frac{9abc}{a^3+b^3+c^3}=\frac{9abc}{3abc+1-3x}\geq \frac{3(4x-1)}{2-5x}$$

Như thế, ta phải chứng minh

$$7\sqrt{3(1-2x)}+\frac{3(4x-1)(1-2x)}{2-5x}\geq 8$$

Ta có

$$\begin{aligned}147(1-2x)-\left(8-\frac{3(4x-1)(1-2x)}{2-5x}\right)^2&=\frac{(3x-1)^2(227-550x-64x^2)}{(2-5x)^2}\\&\geq \frac{(3x-1)^2\left(227-550\cdot\frac{1}{3}-64\cdot\frac{1}{9}\right)}{(2-5x)^2}=\frac{329(3x-1)^2}{9(2-5x)^2}\geq 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

23 *Chứng minh rằng với mọi số dương a,b,c ta có*

$$\frac{a^3}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^3}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^3}{c^3+abc+a^3}\geq 1$$

Lời giải. Đặt $x=\frac{b}{a},y=\frac{a}{c},z=\frac{c}{b}$ thì ta có $x,y,z>0,xyz=1$ và bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{x^3+\frac{x}{y}+1}\geq 1$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x^3+x^2z+1} \ge 1$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{yz}{x^2+yz+zx} \ge 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{yz}{x^2+yz+zx} \ge \frac{(yz+zx+xy)^2}{yz(x^2+yz+zx)+zx(y^2+zx+xy)+xy(z^2+xy+yz)} = 1$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $\frac{a}{b} \to 0, \frac{b}{c} \to 0$ và các hoán vị.

♡♡♡

24 *Cho các số dương $a,b,c,d,$ chứng minh rằng*

$$\frac{abc}{(d+a)(d+b)(d+c)} + \frac{abd}{(c+a)(c+b)(c+d)} + \frac{acd}{(b+a)(b+c)(b+d)} + \frac{bcd}{(a+b)(a+c)(a+d)} \ge \frac{1}{2}$$

Lời giải. Đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}, t=\frac{1}{d}$ thì ta có $x,y,z,t>0$ và bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^3}{(x+y)(x+z)(x+t)} \ge \frac{1}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta suy ra được ta chỉ cần chứng minh

$$2\left(\sum_{\text{cyc}} x^2\right)^2 \ge \sum_{\text{cyc}} x(x+y)(x+z)(x+t)$$

Hay

$$2\left(\sum_{\text{cyc}} x^2\right)^2 \ge \sum_{\text{cyc}} x^4 + \sum_{\text{cyc}} (x^3y+y^3z+z^3x) + (x+y+z+t)(xyz+yzt+zxt+txy)$$

Sử dụng kết quả bài toán trước, ta có $3(x^3y+y^3z+z^3x) \le (x^2+y^2+z^2)^2$, ta cần chứng minh

$$2\left(\sum_{\text{cyc}} x^2\right)^2 \ge \sum_{\text{cyc}} x^4 + \frac{1}{3}\sum_{\text{cyc}} (x^2+y^2+z^2)^2 + (x+y+z+t)(xyz+yzt+zxt+txy)$$

Hay

$$\frac{4}{3}\sum_{\text{cyc}} (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \ge (x+y+z+t)(xyz+yzt+zxt+txy)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\begin{aligned} VT &\ge \sum_{\text{cyc}} xyz(x+y+z) + \frac{1}{3}\sum_{\text{cyc}} (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \ge \sum_{\text{cyc}} xyz(x+y+z) + 4xyzt \\ &= (x+y+z+t)(xyz+yzt+zxt+txy) = VP \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

♡♡♡

25 *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$, ta có*

$$a^{b+c} + b^{c+a} + c^{a+b} \geq 1$$

Lời giải. Nếu 1 trong các số a, b, c không nhỏ hơn 1 thì bất đẳng thức là hiển nhiên. Xét trường hợp $a, b, c \leq 1$, khi đó có 2 khả năng

Khả năng 1. Nếu $a+b+c \leq 1$, suy ra $\max\{a+b, b+c, c+a\} \leq 1$, sử dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\frac{1}{a^{b+c}} = \left(1 + \frac{1}{a} - 1\right)^{b+c} \leq 1 + \left(\frac{1}{a} - 1\right)(b+c) \leq 1 + \frac{b+c}{a} = \frac{a+b+c}{a}$$

Suy ra

$$a^{b+c} \geq \frac{a}{a+b+c}$$

Sử dụng tương tự với b, c rồi cộng lại, ta có đpcm.

Khả năng 2. Nếu $a + b + c \geq 1$, lại sử dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\frac{1}{a^c} \leq \frac{a + c(1-a)}{a}, \qquad \frac{1}{a^b} \leq \frac{a + b(1-a)}{a}$$

Suy ra

$$a^{b+c} \geq \frac{a^2}{(a + b(1-a))(a + c(1-a))}$$

Sử dụng tương tự với b, c, ta cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{(a + b(1-a))(a + c(1-a))} \geq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{(a + b(1-a))(a + c(1-a))} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum_{\text{cyc}}(a + b(1-a))(a + c(1-a))}$$

Ta lại có

$$(a+b+c)^2 - \sum_{\text{cyc}}(a + b(1-a))(a + c(1-a)) = (ab+bc+ca)(a+b+c-1) + abc(3-a-b-c) \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

♡♡♡

26 *Cho $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số không âm có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^3x_2^2 + x_2^3x_3^2 + \cdots + x_n^3x_1^2 + n^{2(n-1)}x_1^3x_2^3 \cdots x_n^3$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x_1 = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, ta sẽ chứng minh

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq P(x_1, x_2 + \cdots + x_n, 0, \ldots, 0)$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
P(x_1, x_2 + \cdots + x_n, 0, \ldots, 0) &= x_1^3(x_2 + \cdots + x_n)^2 \\
&\geq 2(x_1^3x_2x_3 + x_1^3x_3x_4 + \cdots + x_1^3x_{n-1}x_n) + x_1^3x_2^2 + x_1^3x_n^2 \\
&\geq (x_1^3x_2x_3 + x_1^3x_3x_4 + \cdots + x_1^3x_{n-1}x_n) + (x_2^3x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^3x_n^2) + x_1^3x_2^2 + x_n^3x_1^2 \\
&\geq x_1^3x_2x_3 + x_1^3x_2^2 + x_2^3x_3^2 + \cdots + x_n^3x_1^2
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$x_1^3x_2x_3 \ge n^{2(n-1)}x_1^3x_2^3\cdots x_n^3$$

Nếu $n=3$, bất đẳng thức trở thành $x_2x_3 \le \frac{1}{9}$. Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$x_2x_3 \le \left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)^2 \le \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

Nếu $n>3$, bất đẳng thức trở thành

$$x_2^2x_3^2x_4^3\dots x_n^3 \le \frac{1}{n^{2(n-1)}}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\begin{aligned} x_2^2x_3^2x_4^3\cdots x_n^3 &\le (x_2x_3\cdots x_n)^2 \le \left(\frac{x_2+x_3+\cdots+x_n}{n-1}\right)^{2(n-1)} \\ &\le \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^{2(n-1)} = \frac{1}{n^{2(n-1)}} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Lại có

$$x_1^3(x_2+\cdots+x_n)^2 = 108\left(\frac{x_1}{3}\right)^3\left(\frac{x_2+\ldots+x_n}{2}\right)^2 \le 108\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{5}\right)^5 = \frac{108}{3125}$$

Suy ra $P(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le \frac{108}{3125}$. Mặt khác, cho $x_1=\frac{3}{5}, x_2=\frac{2}{5}, x_3=\cdots=x_n=0$, ta có $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{108}{3125}$. Vậy

$$\max P(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{108}{3125}.$$

♡♡♡

27 *Cho các số thực $a_1,a_2,\ldots,a_n$ thỏa $a_1a_2\cdots a_n=1$, tìm các hằng số tốt nhất m,M sao cho*

$$\sqrt{a_1^2+n^2-1}+\sqrt{a_2^2+n^2-1}+\cdots+\sqrt{a_n^2+n^2-1} \le m(a_1+a_2+\cdots+a_n)+M$$

Lời giải. Cho $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$, ta suy ra được $mn+M\ge n^2$. Lại cho $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=\frac{1}{x}>0, a_n=x^{n-1}$, ta có

$$\sqrt{x^{2n-2}+n^2-1}+(n-1)\sqrt{\frac{1}{x^2}+n^2-1} \le m\left(x^{n-1}+\frac{n-1}{x}\right)+M$$

$$\sqrt{1+\frac{n^2-1}{x^{2n-2}}}+(n-1)\sqrt{\frac{1}{x^{2n}}+\frac{n^2-1}{x^{2n-2}}} \le m\left(1+\frac{n-1}{x^n}\right)+\frac{M}{x^{n-1}}$$

Cho $x\to\infty$, ta suy ra được $m\ge 1$, do đó

$$m\sum_{i=1}^n a_i + M \ge m\sum_{i=1}^n a_i + n^2 - mn = m\left(\sum_{i=1}^n a_i - n\right)+n^2 \ge \sum_{i=1}^n a_i + n(n-1)$$

Từ đây, ta sẽ chứng minh $m=1, M=n(n-1)$ là các hằng số cần tìm, tức là

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2+n^2-1} \le \sum_{i=1}^n a_i + n(n-1)$$

Ta sẽ chứng minh với mọi $x>0$ thì

$$\sqrt{x^2+n^2-1} \le x + \frac{n(n-1)}{x+n-1}$$

$$\frac{n+1}{x+\sqrt{x^2+n^2-1}} \le \frac{n}{x+n-1}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$x+\sqrt{x^2+n^2-1} \ge x+\frac{x+n^2-1}{n} = \frac{(n+1)(x+n-1)}{n}$$

Sử dụng bất đẳng thức này lần lượt cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rồi cộng lại, ta cần chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i+n-1} \le 1$$

Đặt $a_i = x_i^n > 0$, ta có theo bất đẳng thức AM–GM

$$\frac{n-1}{a_i+n-1} = 1-\frac{a_i}{a_i+n-1} = 1-\frac{x_i^{n-1}}{x_i^{n-1}+(n-1)x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n} \le 1-\frac{x_i^{n-1}}{x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}}$$

Cho $i = 1, 2, \ldots, n$, rồi cộng lại ta có đpcm. Vậy $m = 1, M = n(n-1)$ là các hằng số tốt nhất của bất đẳng thức đã cho.

♡♡♡

28 *Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c, d, ta có*

$$\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}+\frac{b}{3b^2+2c^2+d^2}+\frac{c}{3c^2+2d^2+a^2}+\frac{d}{3d^2+2a^2+b^2} \le \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM–GM và bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\frac{18a}{3a^2+2b^2+c^2} = \frac{18a}{2(a^2+b^2)+a^2+c^2} \le \frac{9}{2b+c} \le \frac{2}{b}+\frac{1}{c}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{18b}{3b^2+2c^2+d^2} \le \frac{2}{c}+\frac{1}{d}, \qquad \frac{18c}{3c^2+2d^2+a^2} \le \frac{2}{d}+\frac{1}{a}, \qquad \frac{18d}{3d^2+2a^2+b^2} \le \frac{2}{a}+\frac{1}{b}$$

Cộng tương ứng các bất đẳng thức trên vế theo vế, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

♡♡♡

29 *Cho các số dương x, y, z, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{x(y+z)}{x^2+yz}+\frac{y(z+x)}{y^2+zx}+\frac{z(x+y)}{z^2+xy} \le \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} \le \frac{x^2+yz}{x(y+z)}+\frac{y^2+zx}{y(z+x)}+\frac{z^2+xy}{z(x+y)}$$

Lời giải. 1. Trước hết, ta sẽ chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x(y+z)}{x^2+yz} \le \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Đặt $x = a^3, b = y^3, z = c^3$ $(a, b, c > 0)$, ta có bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3(b^3+c^3)}{a^6+b^3c^3} \le \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

Sử dụng bất đẳng thức $x^3+y^3 \ge xy(x+y)$ $\forall x, y > 0$, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3(b^3+c^3)}{a^6+b^3c^3} \le \frac{1}{abc}\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2(b^3+c^3)}{a^2+bc}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2(b^3+c^3)}{a^2+bc} \le \sum_{\text{cyc}} a^3$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2(a^3+abc-b^3-c^3)}{a^2+bc} \ge 0$$

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3(a-b)(a-c)}{a^2+bc} + \sum_{\text{cyc}} \frac{ab(a-b)^2(a+b)(ac+bc-ab)}{(a^2+bc)(b^2+ca)} \ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a,b,c\}$, ta có

$$\begin{aligned} VT &\ge \frac{a^3(a-b)(a-c)}{a^2+bc} + \frac{b^3(b-a)(b-c)}{b^2+ca} - \frac{a^2b^2(a-b)^2(a+b)}{(a^2+bc)(b^2+ca)} \\ &= \frac{c(a-b)^2(a+b)(a^3+b^3-a^2c-b^2c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)} \ge 0 \end{aligned}$$

2. Ta còn phải chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2+yz}{x(y+z)} \ge \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Nếu $\frac{xy+yz+zx}{x+y+z} \ge \sqrt[3]{xyz}$, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz và bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\begin{aligned} VT &= \sum_{\text{cyc}} \frac{x^2}{x(y+z)} + \sum_{\text{cyc}} \frac{yz}{x(y+z)} \ge \frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)} + \frac{(xy+yz+zx)^2}{2xyz(x+y+z)} \\ &\ge \sqrt{\frac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{xyz}} \ge \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} \end{aligned}$$

Nếu $\sqrt[3]{xyz} \ge \frac{xy+yz+zx}{x+y+z}$, sử dụng bất đẳng thức này, ta cần chứng minh

$$(xy+yz+zx)\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2+yz}{x(y+z)} \ge (x+y+z)^2$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{y^2z^2+x^2yz}{x(y+z)} \ge xy+yz+zx$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(yz+xy)(yz+zx)}{xy+zx} \ge (xy+yz)+(yz+zx)+(zx+xy)$$

Bất đẳng thức này đúng theo bất đẳng thức AM–GM, vậy ta có đpcm.

♡♡♡

30 *Với mọi số dương a,b,c thỏa $a+b+c=3$, ta có*

$$\frac{a}{b^2+c} + \frac{b}{c^2+a} + \frac{c}{a^2+b} \ge \frac{3}{2}$$

Lời giải. Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $a \geq b \geq c$, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b^2+c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum_{\text{cyc}} ab^2 + \sum_{\text{cyc}} ab} = \frac{9}{\sum_{\text{cyc}} ab^2 + \sum_{\text{cyc}} ab}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} ab^2 + \sum_{\text{cyc}} ab \leq 6$$

Hay

$$2\sum_{\text{cyc}} a^3 + 3\sum_{\text{cyc}} a^2b + 3abc \geq 6\sum_{\text{cyc}} ab^2$$

Bất đẳng thức này đúng do

$$\sum_{\text{cyc}} a^3 \geq \sum_{\text{cyc}} a^2b \geq \sum_{\text{cyc}} ab^2$$

$$\sum_{\text{cyc}} a^3 + 3abc \geq \sum_{\text{cyc}} a^2b + \sum_{\text{cyc}} ab^2 \geq 2\sum_{\text{cyc}} ab^2$$

Trường hợp 2. $c \geq b \geq a$, bất đẳng thức được viết lại như sau

$$2\sum_{\text{cyc}} a^4 + 2\sum_{\text{cyc}} a^2b^3 + 2\sum_{\text{cyc}} a^2b^2 + 3abc \geq 3a^2b^2c^2 + 3\sum_{\text{cyc}} ab^3 + 3\sum_{\text{cyc}} a^3b^2$$

Sử dụng kết quả bài toán trước và bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} a^4 + 2\sum_{\text{cyc}} a^2b^2 \geq 3\sum_{\text{cyc}} ab^3, \qquad 1 \geq abc$$

Ta còn phải chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} a^4 + 2\sum_{\text{cyc}} a^2b^3 \geq 3\sum_{\text{cyc}} a^3b^2$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} a^5 + \sum_{\text{cyc}} ab(a^3+b^3) + 6\sum_{\text{cyc}} a^2b^3 \geq 9\sum_{\text{cyc}} a^3b^2$$

Bất đẳng thức này đúng do

$$\sum_{\text{cyc}} a^5 \geq \sum_{\text{cyc}} a^2b^3 \geq \sum_{\text{cyc}} a^3b^2$$

$$\sum_{\text{cyc}} ab(a^3+b^3) \geq \sum_{\text{cyc}} a^2b^2(a+b) = \sum_{\text{cyc}} a^3b^2 + \sum_{\text{cyc}} a^2b^3 \geq 2\sum_{\text{cyc}} a^3b^2$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

♡♡♡

31 *Với mọi số không âm a, b, c thỏa $a + b + c = 3$, ta có*

$$a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1} \leq 5$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} a\sqrt{b^3+1} = \sum_{\text{cyc}} a\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)} \leq \frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}} a(b^2+2) = \frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}} ab^2 + 3$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} ab^2 \le 4$$

Khôn mất tính tổng quát, giả sử $c \ge b \ge a \ge 0$, ta có

$$a(b-a)(b-c) \le 0$$

Suy ra

$$ab^2 + a^2c \le a^2b + abc \le a^2b + 2abc$$

Do đó

$$\sum_{\text{cyc}} ab^2 \le bc^2 + a^2b + 2abc = b(a+c)^2 \le \frac{1}{2}\left(\frac{2b+(a+c)+(a+c)}{3}\right)^3 = 4$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) = (0,1,2)$ và các hoán vị tương ứng.

♡♡♡

32 *Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a,b,c > 0$*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9 + \frac{k\max\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\}}{(a+b+c)^2}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$, ta cần tìm k sao cho

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9 + \frac{k(a-c)^2}{(a+b+c)^2}$$

Cho $b = \frac{a+c}{2}$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{3(a-c)^2}{2ac} \ge \frac{4k(a-c)^2}{9(a+c)^2}$$

Hay

$$k \le \frac{27(a+c)^2}{8ac}$$

Cho $a = c$, ta suy ra được $k \le \frac{27}{2}$, ta sẽ chứng minh đây là giá trị cần tìm, tức là

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9 + \frac{27(a-c)^2}{2(a+b+c)^2}$$

Đặt $a = b+x, c = b-y$ thì ta có $x \ge 0, b \ge y \ge 0$, bất đẳng thức tương đương với

$$9(x-y)^2b^3 + 3(y-x)(x^2+16xy+y^2)b^2 + (4x^4+11x^3y+78x^2y^2+11xy^3+4y^4)b + 2xy(y-x)^3 \ge 0$$

Nếu $y \ge x$ thì ta có ngay đpcm, xét $x \ge y$, khi đó, ta có

$$2x^4b + 2xy(y-x)^3 \ge 2x^4y + 2xy(y-x)^3 \ge 2x^4y - 2x^4y = 0$$

Ta cần chứng minh

$$f(b) = 9(x-y)^2b^2 + 3(y-x)(x^2+16xy+y^2)b + 2x^4 + 11x^3y + 78x^2y^2 + 11xy^3 + 4y^4 \ge 0$$

Nhưng bất đẳng thức này đúng vì

$$\Delta_f = -9(7x^4+12x^3y+54x^2y^2+12xy^3+15y^4)(x-y)^2 \le 0$$

Vậy ta có đpcm, từ đó ta đi đến kết luận

$$k_{\max} = \frac{27}{2}.$$

♡♡♡

33 *Cho các số dương x, y, z có tích bằng 1, chứng minh rằng với mọi $k \ge 0$, ta có*

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y+k}} + \sqrt[3]{\frac{y}{z+k}} + \sqrt[3]{\frac{z}{x+k}} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{k+1}}$$

Lời giải. Do $x, y, z > 0, xyz = 1$ nên tồn tại $a, b, c > 0$ sao cho $x = \frac{a^4}{b^4}, y = \frac{c^4}{a^4}, z = \frac{b^4}{c^4}$, bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^{8/3}}{b^{4/3}\sqrt[3]{c^4+ka^4}} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{k+1}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a^{8/3}}{b^{4/3}\sqrt[3]{c^4+ka^4}}\right)^3 \left(\sum_{\text{cyc}} (c^4+ka^4)\right) \ge \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b}\right)^4$$

Ta cần chứng minh

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b}\right)^4 \ge \frac{27}{k+1} \sum_{\text{cyc}} (c^4+ka^4)$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b} \ge \sqrt[4]{27(a^4+b^4+c^4)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a^4+b^4+c^4 = 3$, suy ra $a \le \sqrt[4]{3} < 2$, do đó

$$\sum_{\text{cyc}} 4(a^3-a^2) = \sum_{\text{cyc}} 4(a^3-a^2) - \sum_{\text{cyc}} (a^4-1) = \sum_{\text{cyc}} (a-1)^2(1+2a-a^2) \ge 0$$

Suy ra

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \ge 1$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b} \ge \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} S_a(b-c)^2$$

trong đó

$$S_a = \frac{a^2+b^2}{c} - b, \qquad S_b = \frac{b^2+c^2}{a} - c, \qquad S_c = \frac{c^2+a^2}{b} - a$$

Có 2 trường hợp xảy ra

Trường hợp 1. $a \ge b \ge c$, khi đó dễ thấy $S_a, S_c \ge 0$, ta lại có

$$S_a + 2S_b = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} - 2c + \frac{b(b-c)}{c} + \frac{b^2+2c^2}{a} \ge \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} - 2c \ge \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} - 2c \ge a+b-2c \ge 0$$

Ta sẽ chứng minh $S_c + 2S_b \ge 0$. Thật vậy, nếu $a^2 \ge 2b^2$, ta có

$$S_c + 2S_b = \frac{(a-b)(a^2-2b^2)}{ab} + \frac{c^2}{b} + \frac{2c^2}{a} + 2(b-c) \ge 0$$

Nếu $2b^2 \ge a^2$ và $a \ge 2c$, ta có

$$S_c + 2S_b = \frac{a(a-b)}{b} + \frac{c^2}{b} + \frac{2c^2}{a} + \frac{2b^2}{a} - 2c \ge \frac{2b^2}{a} - 2c \ge a - 2c \ge 0$$

Nếu $2b^2 \ge a^2$ và $2c \ge a$, ta có

$$\begin{aligned} S_c + 2S_b &= \frac{a(a-b)}{b} + \frac{c^2}{b} + \frac{2c^2}{a} + \frac{2b^2}{a} - 2c \ge \frac{a(a-b)}{b} + \frac{a^2}{4b} + \frac{a}{2} + \frac{2b^2}{a} - 2c \\ &= \frac{(a-b)(5a-4b)}{4ab} + \frac{3a}{4} + \frac{b^2}{a} + b - 2c \ge \frac{3a}{4} + \frac{a}{2} - c \ge 0 \end{aligned}$$

Trường hợp 2. $c \ge b \ge a$, khi đó dễ thấy $S_b, S_c \ge 0$, ta có

$$S_b + S_a = \frac{b(b-a) + c(c-a)}{a} + \frac{a^2+b^2}{c} \ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Nhận xét. Bất đẳng thức với 4 số vẫn còn đúng

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y+k}} + \sqrt[3]{\frac{y}{z+k}} + \sqrt[3]{\frac{z}{t+k}} + \sqrt[3]{\frac{t}{x+k}} \ge \frac{4}{\sqrt[3]{k+1}} \qquad \forall x, y, z, t, k > 0, xyzt = 1$$

♡♡♡

34 *Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{b^2+c^2}{a(b+c)} + \frac{c^2+a^2}{b(c+a)} + \frac{a^2+b^2}{c(a+b)} \ge (a^2+b^2+c^2)\sqrt{\frac{3}{abc(a+b+c)}}$$

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{b^2+c^2}{a(b+c)} \ge \frac{(a^2+b^2+c^2)\sqrt{3abc(a+b+c)}}{abc(a+b+c)}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có $ab + bc + ca \ge \sqrt{3abc(a+b+c)}$, ta cần chứng minh

$$abc(a+b+c)\sum_{\text{cyc}} \frac{b^2+c^2}{a(b+c)} \ge (ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)$$

Hay

$$\frac{1}{2}abc\sum_{\text{cyc}} \frac{(b-c)^2}{b+c} \ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

♡♡♡

35 *Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$2\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) + 3(a+b+c) \ge \frac{15(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \min\{a, b, c\}$, đặt $b = a + x, c = a + y$ $(x, y \ge 0)$, bất đẳng thức có thể viết lại như sau

$$(x^2 - xy + y^2)a^3 + 3xy(2y-x)a^2 + (x^4 - 5x^3y + 6x^2y^2 + xy^3 + y^4)a + xy^3(x+y) \ge 0$$

Ta sẽ chứng minh

$$g(a) = (x^2 - xy + y^2)a^2 + 3xy(2y-x)a + x^4 - 5x^3y + 6x^2y^2 + xy^3 + y^4 \ge 0$$

Thật vậy, ta có

$$\Delta_g = -(4x^6 - 24x^5y + 39x^4y^2 - 4x^3y^3 - 12x^2y^4 + 4y^6) = -f(x)$$

Nếu $x \geq 3y$, ta có $f'(x) = 12x(x-2y)(2x^2(x-3y) + xy^2 + y^3) \geq 0$ nên $f(x)$ là hàm đông biến, suy ra $f(x) \geq f(3y) = 31y^6 \geq 0$. Nếu $x \leq 3y$, ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^3 - 6x^2y + xy^2 + y^3)^2 + x^3y^2(3y - x) + y^3(x^3 + 4y^3 - y(x+y)^2) \\ &\geq y^3(x^3 + 4y^3 - y(x+y)^2) \geq y^3\left(\frac{1}{4}(x+y)^3 + 3y^3 - y(x+y)^2\right) \\ &= y^3\left(\frac{1}{8}(x+y)^3 + \frac{1}{8}(x+y)^3 + 3y^3 - y(x+y)^2\right) \geq \left(\frac{3\sqrt[3]{3}}{4} - 1\right) y^4(x+y)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Như thế, ta luôn có $f(x) \geq 0$, suy ra $g(a) \geq 0$. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

♡♡♡

36 *Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z có tích bằng 1 và với mọi $k \geq 0$, ta có*

$$\sqrt[4]{\frac{x}{y+k}} + \sqrt[4]{\frac{y}{z+k}} + \sqrt[4]{\frac{z}{x+k}} \geq \frac{3}{\sqrt[4]{k+1}}$$

Lời giải. Do $x, y, z > 0, xyz = 1$ nên tồn tại các số dương a, b, c sao cho $x = \frac{a^5}{b^5}, y = \frac{c^5}{a^5}, z = \frac{b^5}{c^5}$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^{5/2}}{b^{5/4}\sqrt[4]{c^5 + ka^5}} \geq \frac{3}{\sqrt[4]{k+1}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a^{5/2}}{b^{5/4}\sqrt[4]{c^5 + ka^5}}\right)^4 \left(\sum_{\text{cyc}} (c^5 + ka^5)\right) \geq \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b}\right)^5$$

Ta cần chứng minh

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b}\right)^5 \geq \frac{81}{k+1} \sum_{\text{cyc}} (c^5 + ka^5)$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b} \geq \sqrt[5]{81(a^5 + b^5 + c^5)}$$

Sử dụng kết quả bài trên, ta cần chứng minh

$$\frac{15(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c} - 3(a + b + c) \geq 2\sqrt[5]{81(a^5 + b^5 + c^5)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a + b + c = 1$, đặt $ab + bc + ca = \frac{1-q^2}{3}, r = abc$ $(1 \geq q \geq 0)$, thế thì ta có $r \leq \frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}$, khi đó, ta có

$$a^5 + b^5 + c^5 = \frac{1}{9}(15(q^2 + 2)r + 35q^4 - 25q^2 - 1)$$

Do đó, bất đẳng thức tương đương

$$5q^2 + 1 \geq \sqrt[5]{9(15(q^2 + 2)r + 35q^4 - 25q^2 - 1)}$$

Do $r \le \frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$5q^2+1 \ge \sqrt[5]{5(q^2+2)(1-q)^2(1+2q)+315q^4-225q^2-9}$$

Hay

$$5q^2+1 \ge \sqrt[5]{10q^5+300q^4+20q^3-250q^2+1}$$

Ta có

$$VT^5 - VP = 5q^2(625q^8+625q^6+250q^4-2q^3-10q^2-4q+55) \ge 0 \text{ (do } 1 \ge q \ge 0)$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Nhận xét. Từ kết quả bài này, ta có thể suy ra được kết quả bài 33. Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là: Với những giá trị nào của n thì bất đẳng thức sau đúng

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y+k}}+\sqrt[n]{\frac{y}{z+k}}+\sqrt[n]{\frac{z}{x+k}} \ge \frac{3}{\sqrt[n]{k+1}}$$

♡♡♡

37 *Chứng minh rằng với mọi số không âm a,b,c và với mọi $k \ge 3$, ta có*

$$\frac{a(b^k+c^k)}{a^2+bc}+\frac{b(c^k+a^k)}{b^2+ca}+\frac{c(a^k+b^k)}{c^2+ab} \ge a^{k-1}+b^{k-1}+c^{k-1}$$

Lời giải. Ta sẽ chỉ ra rằng ta chỉ cần xét bất đẳng thức trong trường hợp $k=3$ là đủ, thật vậy xét hàm số

$$f(k)=\frac{1}{a^{k-1}+b^{k-1}+c^{k-1}}\sum_{\text{cyc}}\frac{a(b^k+c^k)}{a^2+bc}$$

Ta có

$$\begin{aligned}(a^{k-1}+b^{k-1}+c^{k-1})^2f'(k) &= \sum_{\text{cyc}} a^{k-1}b^{k-1}(a-b)(\ln a-\ln b)\left(\frac{c}{c^2+ab}+\frac{ab(a+b-c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}\right)\\ &\ge \sum_{\text{cyc}} ca^{k-1}b^{k-1}(a-b)(\ln a-\ln b)\left(\frac{1}{c^2+ab}-\frac{ab}{(a^2+bc)(b^2+ca)}\right)\\ &= \sum_{\text{cyc}}\frac{c^2a^{k-1}b^{k-1}(a-b)(\ln a-\ln b)(a^3+b^3)}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)} \ge 0\end{aligned}$$

Do đó $f(k)$ là hàm đồng biến, và như thế nếu bất đẳng thức trong trường hợp $k=3$ thì cũng đúng cho mọi $k \ge 3$. Ta còn phải chứng minh với $k=3$ thì bất đẳng thức đúng, hay

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a(b^3+c^3)}{a^2+bc} \ge \sum_{\text{cyc}} a^2$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a(b^3+c^3)}{a^2+bc}-\sum_{\text{cyc}}(b^2-bc+c^2) \ge \sum_{\text{cyc}} ab-\sum_{\text{cyc}} a^2$$

$$\sum_{\text{cyc}} M_a(a-b)(a-c) \ge 0$$

trong đó

$$M_a=\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{a^2+bc}, \qquad M_b=\frac{(b+c-a)(a+b-c)}{b^2+ca}, \qquad M_c=\frac{(c+a-b)(b+c-a)}{c^2+ab}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$, xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $b + c \ge a$, khi đó, ta có $M_a, M_b, M_c \ge 0$, lại có

$$aM_a - bM_b = \frac{(a+b-c)(a-b)(ab(a+b-c)+c(a^2+b^2)+c^2(a+b))}{(a^2+bc)(b^2+ca)} \ge 0$$

Trường hợp 2. $a \ge b + c$, khi đó, ta có $M_a \ge 0 \ge M_b, M_c$, viết lại bất đẳng thức như sau

$$(a-c)(M_a(a-b)+M_c(b-c)) - M_b(a-b)(b-c) \ge 0$$

Ta cần chứng minh

$$M_a(a-b)+M_c(b-c) \ge 0$$

Ta có

$$\begin{aligned} M_a(a-b)+M_c(b-c) &= (a+c-b)\left(\frac{(a-b)(a+b-c)}{a^2+bc} - \frac{(b-c)(a-b-c)}{c^2+ab}\right) \\ &\ge (a+c-b)(a-b-c)\left(\frac{a}{a^2+bc} - \frac{b-c}{c^2+ab}\right) \\ &= \frac{c(a+c-b)(a-b-c)(a^2-b^2+ac+bc)}{(a^2+bc)(c^2+ab)} \ge 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $(a, b, c) \sim (1, 1, 0)$.

♡♡♡

38 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a^4}{a^3+abc+b^3} + \frac{b^4}{b^3+abc+c^3} + \frac{c^4}{c^3+abc+a^3} \ge \frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}$$

Lời giải. Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 \ge abc(a^2+b^2+c^2)$, khi đó sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{a^3+abc+b^3} \ge \frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{a^5+b^5+c^5+abc(a^2+b^2+c^2)+a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3}$$

Ta cần chứng minh

$$(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2) \ge a^5+b^5+c^5+abc(a^2+b^2+c^2)+a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3$$

Hay

$$a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2 \ge abc(a^2+b^2+c^2) \text{ (đúng)}$$

Trường hợp 2. $a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 \le abc(a^2+b^2+c^2)$, khi đó, ta chứng minh được

$$\begin{aligned} 3(a^4b^3+b^4c^3+c^4a^3) &\le \frac{1}{abc}(a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2)^2 \le (a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2)(a^2+b^2+c^2) \\ &\le abc(a^2+b^2+c^2)^2 \end{aligned}$$

Do đó, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{a^3+abc+b^3} &\ge \frac{(a^4+b^4+c^4)^2}{a^7+b^7+c^7+abc(a^4+b^4+c^4)+a^4b^3+b^4c^3+c^4a^3} \\ &\ge \frac{3(a^4+b^4+c^4)^2}{3(a^7+b^7+c^7)+3abc(a^4+b^4+c^4)+abc(a^2+b^2+c^2)^2} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{3(a^4+b^4+c^4)^2}{3(a^7+b^7+c^7)+3abc(a^4+b^4+c^4)+abc(a^2+b^2+c^2)^2} \ge \frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$, đặt $ab+bc+ca=\frac{1-q^2}{3}$ $(1\ge q\ge 0)$ và $r=abc$, thế thì ta có $0\le r\le \frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}$ và bất đẳng thức trở thành $f(r)\ge 0$, với

$$f(r)=-99r^3+\frac{29-178q^2-31q^4}{3}r^2-\frac{(q^2+5)(20q^4-6q^2+1)}{9}r+\frac{(q^2-1)^2(8q^6+21q^4-3q^2+1)}{81}$$

Theo bất đẳng thức Schur, ta có $27r\ge 1-4q^2$, do đó

$$\begin{aligned} f''(r) &= -594r+\frac{2(29-178q^2-31q^4)}{3} \le -22(1-4q^2)+\frac{2(29-178q^2-31q^4)}{3} \\ &= -\frac{2(31q^4+46q^2+4)}{3}<0 \end{aligned}$$

Suy ra $f(r)$ là hàm lõm, do đó

$$f(r)\ge \min\left\{f(0)f,\left(\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\right)\right\}$$

Lại có

$$f(0)=\frac{(q^2-1)^2(8q^6+21q^4-3q^2+1)}{81}\ge 0$$

$$f\left(\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\right)=\frac{2q^2(q-1)^2(46q^6+54q^5+102q^4+13q^3+36q^2-12q+4)}{2187}\ge 0$$

Để hoàn thành chứng minh của bài toán, xin được nêu một lời giải cho bất đẳng thức

$$3abc(a^4b^3+b^4c^3+c^4a^3)\le (a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2)^2$$

Đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$, thế thì bất đẳng thức trở thành

$$\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{x^2}{y}\right)^2\ge 3\sum_{\text{cyc}}\frac{x^3}{y}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} S_x(y-z)^2\ge 0$$

trong đó

$$S_x=\frac{y^2}{z^2}-\frac{y}{z}+\frac{2x}{y}-\frac{3}{2},\qquad S_y=\frac{z^2}{x^2}-\frac{z}{x}+\frac{2y}{z}-\frac{3}{2},\qquad S_z=\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}+\frac{2z}{x}-\frac{3}{2}$$

Có 2 trường hợp xảy ra

+, Nếu $x\ge y\ge z$, khi đó ta có $S_x\ge 0$, lại có

$$\begin{aligned} S_y+S_z &= \frac{z^2}{x^2}+\frac{z}{x}+\frac{2y}{z}+\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}-3\ge \frac{z}{x}+\frac{2y}{z}+\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}-3 \\ &\ge \frac{y}{x}+\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}-1=\frac{(x+y)(x-y)^2}{xy^2}\ge 0 \end{aligned}$$

$$S_z+2S_y=\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}+\frac{2z^2}{x^2}+\frac{4y}{z}-\frac{9}{2}\ge \frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}+\frac{2y^2}{x^2}-\frac{1}{2}\ge 0$$

$$S_x + 2S_y = \frac{y^2}{z^2} + \frac{3y}{z} + \frac{2x}{y} + \frac{2z^2}{x^2} - \frac{2z}{x} - \frac{9}{2} \ge \frac{2x}{y} + \frac{2y^2}{x^2} - \frac{2y}{x} - \frac{1}{2} \ge 0$$

+, Nếu $z \ge y \ge x$, khi đó ta có

$$S_y = \frac{z^2}{x^2} - \frac{z}{x} + \frac{2y}{z} - \frac{3}{2} \ge \frac{z^2}{x^2} - \frac{z}{x} + \frac{2x}{z} - \frac{3}{2} \ge 0$$

$$S_y + S_z = \frac{z^2}{x^2} + \frac{z}{x} + \frac{2y}{z} + \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} - 3 \ge \frac{z^2}{x^2} + \frac{2y}{z} - 3 \ge \frac{z^2}{y^2} + \frac{2y}{z} - 3 \ge 0$$

$$\begin{aligned} S_x + S_y &= \frac{z^2}{x^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{y}{z} + \frac{2x}{y} - \frac{z}{x} - 3 \ge \frac{z}{x} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{y}{z} + \frac{2x}{y} - 4 \\ &= \frac{yz^3 + 2(x^2 - 2xy)z^2 + xy^2z + xy^3}{xyz^2} \ge \frac{y^4 + 2(x^2 - 2xy)y^2 + xy^3 + xy^3}{xyz^2} \\ &= \frac{y(x^2 + (x-y)^2)}{xz^2} \ge 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) \sim (1, 1, 1)$ hoặc $(a, b, c) \sim (1, 0, 0)$.

♡♡♡

39 *Cho các số dương x, y, z, t thỏa*

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{t+1} = 1$$

Chứng minh rằng

$$\min\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}, \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{x}, \frac{1}{t} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right\} \le 1 \le$$
$$\le \max\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}, \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{x}, \frac{1}{t} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right\}$$

Lời giải. Đặt $a = \frac{1}{x+1}, b = \frac{1}{y+1}, c = \frac{1}{z+1}, d = \frac{1}{t+1}$, thế thì ta có $1 \ge a, b, c, d \ge 0$ và $a + b + c + d = 1$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c \ge d$, bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} + \frac{d}{1-d} \le 1 \le \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c}$$

Hay

$$\frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} \le 1 \le \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b}$$

Do $a \ge b \ge c \ge d$ nên

$$\frac{b}{a+c+d} \le \frac{b}{b+c+d}, \qquad \frac{c}{a+b+d} \le \frac{c}{b+c+d}, \qquad \frac{d}{a+b+c} \le \frac{d}{b+c+d}$$

Suy ra

$$\frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} \le 1$$

Tương tự, ta có

$$\frac{a}{b+c+d} \ge \frac{a}{a+b+c}, \qquad \frac{b}{c+d+a} \ge \frac{b}{a+b+c}, \qquad \frac{c}{d+a+b} \ge \frac{c}{a+b+c}$$

Do đó

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} \ge 1$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

♡♡♡

40 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a^2}{\sqrt{4a^2+ab+4b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{4b^2+bc+4c^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{4c^2+ca+4a^2}} \ge \frac{a+b+c}{3}$$

Lời giải. Với mọi $x \ge 0$, ta có

$$\frac{6x^2}{\sqrt{4x^2+x+4}} \ge 3x-1$$

Thật vậy, nếu $x \le \frac{1}{3}$, bất đẳng thức là hiển nhiên. Nếu $x \ge \frac{1}{3}$, ta có

$$\frac{36x^4}{4x^2+x+4}-(3x-1)^2=\frac{(x-1)^2(15x-4)}{4x^2+x+4} \ge 0$$

Sử dụng bất đẳng thức trên, lần lượt thay x bởi $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$, ta có

$$\frac{6a^2}{\sqrt{4a^2+ab+4b^2}} \ge 3a-b, \qquad \frac{6b^2}{\sqrt{4b^2+bc+4c^2}} \ge 3b-c, \qquad \frac{6c^2}{\sqrt{4c^2+ca+4a^2}} \ge 3c-a$$

Cộng lần lượt vế với vế 3 bất đẳng thức trên, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

41 *Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab} \le \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+27}$$

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương

$$4\sum_{cyc}\frac{a^2(b+c)^2}{(a^2+bc)^2}+8\sum_{cyc}\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)} \le 27+(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Hay

$$4\sum_{cyc}\frac{a^2(b+c)^2}{(a^2+bc)^2}+8\sum_{cyc}\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)} \le 24+\sum_{cyc}\frac{(b+c)^2}{bc}$$

$$\sum_{cyc}\frac{(b+c)^2(a^2-bc)^2}{bc(a^2+bc)^2}+8\sum_{cyc}\frac{c(a-b)^2(a+b)}{(a^2+bc)(b^2+ca)} \ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

42 *Cho các số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=1$, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt{c+2a}} \le \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Lời giải. Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $c \ge b \ge a$, khi đó sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a+2b}}\right)^2 \le (a+b+c)\sum_{cyc}\frac{a}{a+2b}=\sum_{cyc}\frac{a}{a+2b}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{a+2b} \le \frac{3}{2}$$

Đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c}$ thì ta có $x, y \ge 1 \ge z$ và $xyz = 1$, bất đẳng thức tương đương

$$\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2y+1} + \frac{1}{2z+1} \le \frac{3}{2}$$

Do $x, y \ge 1$ nên

$$\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2y+1} = \frac{1}{2xy+1} + \frac{1}{3} - \frac{2(x-1)(y-1)(4xy-1)}{3(2x+1)(2y+1)(2xy+1)} \le \frac{1}{2xy+1} + \frac{1}{3} = \frac{z}{z+2} + \frac{1}{3}$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{z}{z+2} + \frac{1}{2z+1} \le \frac{7}{6}$$

Hay

$$\frac{2z^2+23z+2}{6(z+2)(2z+1)} \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Trường hợp 2. $a \ge b \ge c$, xét 2 khả năng

Khả năng 2.1. $a \ge 4b$, khi đó ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} \le \frac{a+c}{\sqrt{a+c+2b}}, \qquad \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \le \sqrt{b}$$

Thật vậy, ta có

$$\frac{(a+c)^2}{a+c+2b} - \frac{a^2}{a+2b} = \frac{c(a^2+4ab+ac+2bc)}{(a+2b+c)(a+2b)} \ge 0$$

$$\frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \le \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+8b}}$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+8b}} \le \sqrt{b}$$

Hay

$$\frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{8b+c} + \frac{2bc}{\sqrt{(b+2c)(8b+c)}} \le b$$

$$\frac{2b}{b+2c} - \frac{c}{8b+c} \ge \frac{2b}{\sqrt{(b+2c)(8b+c)}}$$

$$\frac{224b^4 - 36b^3c - 71b^2c^2 - 4bc^3 + 4c^4}{(b+2c)^2(8b+c)^2} \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Khả năng 2.2. $4b \ge a$, khi đó ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} \le \frac{a+\frac{c}{2}}{\sqrt{a+2b+\frac{3c}{2}}}, \qquad \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \le \sqrt{b+\frac{c}{2}}$$

Thật vậy, ta có

$$\frac{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}{a+2b+\frac{3c}{2}} - \frac{a^2}{a+2b} = \frac{c(2a(4b-a)+c(a+2b))}{2(a+2b)(2a+4b+3c)} \ge 0$$

$$\frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \le \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2b}}$$

Ta phải chứng minh
$$\frac{b}{\sqrt{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt{c+2b}} \le \sqrt{b+\frac{c}{2}}$$
Hay
$$\frac{b^2}{b+2c}+\frac{c^2}{2b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(2b+c)(b+2c)}} \le b+\frac{c}{2}$$
$$\frac{2b}{b+2c}+\frac{1}{2} \ge \frac{2b}{\sqrt{(2b+c)(b+2c)}}+\frac{c}{2b+c}$$
Do $b \ge c$ nên
$$\frac{c}{2b+c} \le \frac{1}{3} < \frac{1}{2}, \qquad \frac{2b}{\sqrt{(2b+c)(b+2c)}} \le \frac{2b}{b+2c}$$
Như vậy, trong mọi khả năng, ta chỉ cần xét bất đẳng thức trong trường hợp $c=0$, khi đó bất đẳng thức trở thành
$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\sqrt{b} \le \sqrt{\frac{3}{2}}$$
Hay
$$\frac{1-b}{\sqrt{1+b}} \le \sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{b}$$
$$\frac{(1-b)^2}{1+b} \le \left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{b}\right)^2$$
$$\frac{1-2\sqrt{6b}+9b-2b\sqrt{6b}}{2(b+1)} \ge 0 \text{ (đúng)}$$
Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức không xảy ra.

Nhận xét. Ngoài ra, bằng cách sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta tìm được kết quả sau
$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt{c+2a}} \ge 1$$

♡♡♡

43 *Cho các số không âm a,b,c, tìm hằng số k tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng*
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}+\frac{k\max\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\}}{ab+bc+ca}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$, bất đẳng thức trở thành
$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} \ge \frac{3}{2}+\frac{k(a-c)^2}{ab+bc+ca}$$
Cho $c=0, b=1, a=\frac{4}{3}$, ta suy ra được $k \le \frac{7}{16}$, ta sẽ chứng minh đó là giá trị cần tìm, tức là
$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} \ge \frac{3}{2}+\frac{7(a-c)^2}{16(ab+bc+ca)}$$
Hay
$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a(a(b+c)+bc)}{b+c} \ge \frac{3}{2}(ab+bc+ca)+\frac{7}{16}(a-c)^2$$
$$a^2+b^2+c^2+abc\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{b+c} \ge \frac{3}{2}(ab+bc+ca)+\frac{7}{16}(a-c)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{b+c} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$$

Ta cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{2(a+b+c)} \geq \frac{3}{2}(ab+bc+ca)+\frac{7}{16}(a-c)^2$$

Đặt $a=c+x, b=c+y$ thì ta có $x \geq y \geq 0$, bằng biến đổi tương đương, ta có thể đưa bất đẳng thức về

$$(11x^2-32xy+32y^2)c+(x+y)(3x-4y)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng, vậy ta có đpcm, do đó

$$k_{\max}=\frac{7}{16}.$$

♡♡♡

44 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{c+a}\right)^3 \leq \frac{3}{8}\cdot\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^2$$

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh rằng với mọi $x, y, z > 0, xyz=1$ thì

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(1+x)^3}+\frac{5}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 1$$

Thật vậy, đặt $m=\frac{1-x}{1+x}, n=\frac{1-y}{1+y}, p=\frac{1-z}{1+z}$ thì ta có $m, n, p \in [-1,1]$ và $(1-m)(1-n)(1-p)=(1+m)(1+n)(1+p)$, suy ra

$$m+n+p+mnp=0$$

Đặt $q=mn+np+pm, r=mnp$ thì $|r| \leq 1$, ta có

$$m^2n^2p^2=(m+n+p)^2=m^2+n^2+p^2+2q$$

Suy ra

$$2q=m^2(n^2p^2-1)-n^2-p^2 \leq 0$$

Mặt khác, ta lại có

$$2q=m^2(n^2p^2-1)-n^2-p^2 \geq (n^2p^2-1)-n^2-p^2=n^2(p^2-1)-p^2-1 \geq (p^2-1)-p^2-1=-2$$

Do đó $q \in [-1,0]$, ta có bất đẳng thức tương đương

$$r^3+3r^2-q(1+3r) \geq 0$$

Nếu $r \geq -\frac{1}{3}$ thì ta có đpcm, xét $r \leq -\frac{1}{3}$, khi đó, ta có

$$r^3+3r^2-q(1+3r) \geq r^3+3r^2+(1+3r)=(1+r)^3 \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong, sử dụng kết quả này với $x=\frac{a}{b}, y=\frac{b}{c}, z=\frac{c}{a}$, ta suy ra được

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{b^3}{(a+b)^3} \geq 1-\frac{5abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Trở lại bài toán của ta, bất đẳng thức được viết lại như sau

$$\sum_{\text{cyc}}\left(1-\frac{a^3}{(a+b)^3}\right)+\frac{3(a^2+b^2+c^2)^2}{8(ab+bc+ca)^2}\geq 3$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{b^3}{(a+b)^3}+3\sum_{\text{cyc}}\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{3(a^2+b^2+c^2)^2}{8(ab+bc+ca)^2}\geq 3$$

Sử dụng kết quả trên, ta cần chứng minh

$$3\sum_{\text{cyc}}\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{3(a^2+b^2+c^2)^2}{8(ab+bc+ca)^2}\geq 2+\frac{5abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$, đặt $ab+bc+ca=\frac{1-q^2}{3}, r=abc$ $(1\geq q\geq 0)$, khi đó ta có $r\geq \max\left\{0,\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}\right\}$, bất đẳng thức tương đương

$$f(r)=\frac{3}{8}\left(\frac{1+2q^2}{1-q^2}\right)^2+\frac{108r^2+(15+20q^2)r-(1-q^2)^2(1+q^2)}{(1-q^2-3r)^2}\geq 0$$

Ta có

$$f'(r)=\frac{3((87-60q^2)r+(1-q^2)(2q^4+4q^2+3))}{(1-q^2-3r)^3}\geq 0$$

Do đó $f(r)$ là hàm đồng biến, suy ra

Nếu $2q\geq 1$ thì $f(r)\geq f(0)=\frac{3}{8}\left(\frac{1+2q^2}{1-q^2}\right)^2\geq 0$, nếu $1\geq 2q$ thì

$$\begin{aligned}f(r)&\geq f\left(\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}\right)\\&=\frac{3q^2(14(2-10q+13q^2)+124q^2(1-2q)+q^2(1+52q^2+10q^3)+18q^5(1-q))}{8(1-q^2)^2(2-q)^4}\geq 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

45 *Cho a,b,c,d là các số dương thỏa mãn $a,b,c\geq 1$ và $abcd=1$, chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(a^2-a+1)^2}+\frac{1}{(b^2-b+1)^2}+\frac{1}{(c^2-c+1)^2}+\frac{1}{(d^2-d+1)^2}\leq 4$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{1}{(x^2-x+1)^2}+\frac{1}{(y^2-y+1)^2}\leq 1+\frac{1}{(x^2y^2-xy+1)^2}$$

với mọi $x,y\geq 1$. Thật vậy, bất đẳng thức tương đương

$$\left(1-\frac{1}{(x^2-x+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(y^2-y+1)^2}\right)\geq \frac{1}{(x^2-x+1)^2(y^2-y+1)^2}-\frac{1}{(x^2y^2-xy+1)^2}$$

Hay

$$\begin{aligned}&xy(x-1)(y-1)(x^2-x+2)(y^2-y+2)(x^2y^2-xy+1)^2\\&\quad\geq (x-1)(y-1)(x+y)[2x^2y^2-xy(x+y)+x^2+y^2-x-y+2]\end{aligned}$$

$$xy(x^2-x+2)(y^2-y+2)(x^2y^2-xy+1)^2 \ge (x+y)[2x^2y^2-xy(x+y)+x^2+y^2-x-y+2]$$

Do $x, y \ge 1$ nên

$$(x^2-x+2)(y^2-y+2)(x^2y^2-xy+1) \ge 4, \qquad 2xy \ge x+y$$

Do đó

$$xy(x^2-x+2)(y^2-y+2)(x^2y^2-xy+1)^2 \ge 2(x+y)(x^2y^2-xy+1)$$

Ta cần chứng minh

$$2(x^2y^2-xy+1) \ge 2x^2y^2-xy(x+y)+x^2+y^2-x-y+2$$

Hay

$$(x-1)(y-1)(x+y) \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Sử dụng kết quả trên lần lượt với a, b, c, ta được

$$\frac{1}{(a^2-a+1)^2}+\frac{1}{(b^2-b+1)^2} \le 1+\frac{1}{(a^2b^2-ab+1)^2}$$

$$\frac{1}{(a^2b^2-ab+1)^2}+\frac{1}{(c^2-c+1)^2} \le 1+\frac{1}{(a^2b^2c^2-abc+1)^2} = 1+\frac{d^4}{(d^2-d+1)^2}$$

Do đó

$$\frac{1}{(a^2-a+1)^2}+\frac{1}{(b^2-b+1)^2}+\frac{1}{(c^2-c+1)^2} \le 2+\frac{d^4}{(d^2-d+1)^2}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\frac{d^4}{(d^2-d+1)^2}+\frac{1}{(d^2-d+1)^2} = -\frac{(d-1)^4}{(d^2-d+1)^2}+2 \le 2$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

♡♡♡

46 *Với mọi số không âm a, b, c, chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a^2+4bc}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+4ca}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+4ab}{a^2+b^2}} \ge 2+\sqrt{2}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c \ge 0$. Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $4b^3 \ge a^2c$, khi đó ta có

$$\frac{a^2+4bc}{b^2+c^2}-\frac{a^2}{b^2}=\frac{c(4b^3-a^2c)}{b^2(b^2+c^2)} \ge 0, \qquad \frac{b^2+4ca}{c^2+a^2}-\frac{b^2}{a^2}=\frac{c(4a^3-b^2c)}{a^2(c^2+a^2)} \ge 0$$

Suy ra

$$\sum_{\text{cyc}}\sqrt{\frac{a^2+4bc}{b^2+c^2}} \ge \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta được

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{a^2+b^2}{ab}+\left(\frac{a^2+b^2}{\sqrt{2}ab}+2\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}}\right)$$
$$\ge 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\sqrt[4]{\frac{2(a^2+b^2)}{ab}} \ge 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$$

Trường hợp 2. $4b^3 \le a^2c$, suy ra $a \ge 2b$, ta có

$$\frac{a^2+4bc}{b^2+c^2} - \frac{a^2+4b^2}{2b^2} = \frac{(b-c)(a^2(b+c)-4b^2(b-c))}{2b^2(b^2+c^2)} \ge 0$$

Suy ra

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^2+4bc}{b^2+c^2}} \ge \sqrt{\frac{a^2+4b^2}{2b^2}} + \frac{b}{a} + 2\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}}$$

Đặt $x = \frac{a}{b} \ge 2$, ta cần chứng minh

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2}+2} + \frac{1}{x} + 2\sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \ge 2+\sqrt{2}$$

Do $x \ge 2$ nên $x(x^2+1)-(x+1)^2 = x^3\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right) \ge x^3\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}\right) = \frac{1}{8}x^3 > 0$, suy ra $\sqrt{x(x^2+1)} > x+1$, do đó

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{2\sqrt{\frac{x^2}{2}+2}} - \frac{1}{x^2} - \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x(x^2+1)}} > \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{2}{x^2}}} - \frac{1}{x^2} - \frac{x^2-1}{(x^2+1)(x+1)} \\ &\ge \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} - \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{x^2-4}{4x^2} + \frac{(x-2)^2+1}{4(x^2+1)} > 0 \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ là hàm đồng biến trên $[2,+\infty)$, do đó

$$f(x) \ge f(2) = \frac{5}{2} + 2\sqrt{\frac{2}{5}} > 2+\sqrt{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) \sim (1,1,0)$.

♡♡♡

47 *Cho các số không âm a,b,c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{(a-b)(13a+5b)}{a^2+b^2} + \frac{(b-c)(13b+5c)}{b^2+c^2} + \frac{(c-a)(13c+5a)}{c^2+a^2} \ge 0$$

Lời giải. Bất đẳng thức được viết lại như sau

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{13a^2-8ab-5b^2}{a^2+b^2} \ge 0$$

Hay

$$4\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} + 9\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \ge 0$$

Chú ý rằng

$$\left(1+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\left(1+\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}\right)\left(1+\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}\right) = \left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\left(1-\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}\right)\left(1-\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}\right)$$

Nên

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = -\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Ta cần chứng minh

$$4\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} \ge \frac{9(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} \ge 3\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}$$

Ta phải chứng minh

$$4\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}} \ge \frac{3(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Hay

$$64\prod_{\text{cyc}}(a^2+b^2)^2 \ge 27\prod_{\text{cyc}}(a^2-b^2)(a+b)^2$$

Bất đẳng thức này là hệ quả của bất đẳng thức sau với mọi $x \ge y \ge 0$

$$4(x^2+y^2)^2 \ge 3(x^2-y^2)(x+y)^2$$

Hay

$$x^4 - 6x^3y + 8x^2y^2 + 6xy^3 + 7y^4 \ge 0$$

+, Nếu $x \ge 6y$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

+, Nếu $x \le 6y$ thì ta có

$$x^4 - 6x^3y + 8x^2y^2 + 6xy^3 + 7y^4 = x^2(x-3y)^2 + xy^2(6y-x) + 7y^4 \ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

♡♡♡

48 *Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c, n, ta có*

$$\left(\frac{a^2+bc}{b+c}\right)^n + \left(\frac{b^2+ca}{c+a}\right)^n + \left(\frac{c^2+ab}{a+b}\right)^n \ge a^n + b^n + c^n$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c > 0$. Ta có

$$\left(\frac{a^2+bc}{a(b+c)}\right)^n \ge 1$$

$$\left(\frac{a^2+bc}{a(b+c)}\right)^n + \left(\frac{b^2+ca}{b(c+a)}\right)^n \ge 2\left(\frac{(a^2+bc)(b^2+ca)}{ab(a+c)(b+c)}\right)^{n/2} \ge 2$$

Do

$$(a^2+bc)(b^2+ca) - ab(a+c)(b+c) = c(a-b)^2(a+b) \ge 0$$

Và do đó

$$\left(\frac{a^2+bc}{a(b+c)}\right)^n + \left(\frac{b^2+ca}{b(c+a)}\right)^n + \left(\frac{c^2+ab}{c(a+b)}\right)^n \ge 3$$

Đặt $x = \left(\frac{a^2+bc}{a(b+c)}\right)^n - 1, y = \left(\frac{b^2+ca}{b(c+a)}\right)^n - 1, z = \left(\frac{c^2+ab}{c(a+b)}\right)^n - 1$ thì ta có

$$x \ge 0, \qquad x+y \ge 0, \qquad x+y+z \ge 0$$

Do đó

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{a^2+bc}{b+c}\right)^n - \sum_{\text{cyc}} a^n &= a^n x + b^n y + c^n z \\ &= (a^n-b^n)x + (b^n-c^n)(x+y) + c^n(x+y+z) \ge 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $n \to 0$.

♡♡♡

49 *Cho các số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=1$. Tùy theo giá trị của $n \in \mathbb{N}$, hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P(a,b,c) = a(b-c)^n + b(c-a)^n + c(a-b)^n$$

Lời giải. Trong trường hợp $n=0$ và $n=1$ thì ta có $P=1$ và $P=0$. Xét $n \geq 2$, khi đó có 2 trường hợp

Trường hợp 1. n lẻ, suy ra $n \geq 3$, với giả thiết b là số hạng nằm giữa a và c, ta sẽ chứng minh

$$P(a+c,b,0) \leq P(a,b,c) \leq P(a+c,0,b)$$

Có 2 khả năng

Khả năng 1. $a \geq b \geq c \geq 0$, xét hàm số $g(a) = P(a+c,0,b) - P(a,b,c) = (a+c)^n b - (a+c)b^n - a(b-c)^n - b(c-a)^n - c(a-b)^n$, ta có

$$g'(a) = (nb(a+c)^{n-1} - b^n - (b-c)^n) + n(b(a-c)^{n-1} - c(a-b)^{n-1}) \geq 0$$

Suy ra $g(a)$ là hàm đồng biến, do đó

$$g(a) \geq g(b) = b(b+c)((b+c)^{n-1} - b^{n-1}) \geq 0$$

Xét tiếp hàm số $h(a) = P(a,b,c) - P(a+c,b,0) = (a+c)^n b - (a+c)b^n + a(b-c)^n + b(c-a)^n + c(a-b)^n$, ta có

$$\begin{aligned}
h'(a) &= nb((a+c)^{n-1} - (a-c)^{n-1}) - b^n + (b-c)^n + nc(a-b)^{n-1} \\
&\geq nb((b+c)^{n-1} - (b-c)^{n-1}) - b^n + (b-c)^n \\
&= 2n\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} C_{n-1}^{2i+1} b^{n-2i-1} c^{2i+1} - \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2i+1} b^{n-2i-1} c^{2i+1} + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2i} b^{n-2i} c^{2i} \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} b^{n-2i-1} c^{2i+1} (2nC_{n-1}^{2i+1} - C_n^{2i+1}) + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2i} b^{n-2i} c^{2i} - c^n \geq 0
\end{aligned}$$

Suy ra $h(a)$ là hàm đồng biến, do đó

$$h(a) \geq h(b) = b(b+c)((b+c)^{n-1} - b^{n-1}) \geq 0$$

Khả năng 2. $a \leq b \leq c$, khi đó, ta có

$$P(a,b,c) = a(b-c)^n + b(c-a)^n + c(a-b)^n = -(c(b-a)^n + b(a-c)^n + a(c-b)^n) = -P(c,b,a)$$

Theo trên, ta có

$$P(c+a,b,0) \leq P(c,b,a) \leq P(c+a,0,b)$$

Do đó

$$P(a+c,b,0) = -P(c+a,0,b) \leq P(a,b,c) \leq -P(a+c,b,0) = P(a+c,0,b)$$

Vậy trong mọi khả năng, ta luôn có

$$P(a+c,b,0) \leq P(a,b,c) \leq P(a+c,0,b)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^n - x}{(x+1)^{n+1}}$ với $x \geq 0$, ta có

$$f'(x) = \frac{-x^n + nx^{n-1} + nx - 1}{(x+1)^{n+2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \gamma(x) = x^n - nx^{n-1} - nx + 1 = 0$$

Dễ thấy $x = 0, x = 1$ không là nghiệm của $\gamma(x)$ và nếu $x > 0$ $(x \neq 1)$ là 1 nghiệm của $\gamma(x)$ thì $\frac{1}{x}$ cũng là nghiệm của $\gamma(x)$, do đó, ta chỉ cần xét nghiệm của $\gamma(x)$ trên $[0, 1]$ là đủ. Khi đó, ta có

$$\gamma'(x) = -(n(1 - x^{n-1}) + n(n-1)x^{n-2}) \leq 0$$

Suy ra $\gamma(t)$ là hàm nghịch biến, lại có $\gamma(0) = 1 > 0, \gamma(1) = 2(1-n) < 0$ nên tồn tại duy nhất $x_0 \in (0, 1)$ sao cho $\gamma(x_0) = 0$, do đó phương trình $\gamma(x) = 0$ chỉ có 2 nghiệm dương là x_0 và $\frac{1}{x_0}$. Từ đây, ta dễ dàng kiểm tra được

$$f(x) \leq \max\left\{f(0), f\left(\frac{1}{t_0}\right)\right\} = f\left(\frac{1}{x_0}\right)$$

Suy ra

$$P(a+c, 0, b) = (a+c)^n b - (a+c)b^n = \frac{(a+c)^n b - (a+c)b^n}{(a+b+c)^{n+1}} = f\left(\frac{a+c}{b}\right) \leq f\left(\frac{1}{x_0}\right)$$

$$P(a+c, 0, b) = -(a+c)^n b + (a+c)b^n = -f\left(\frac{a+c}{b}\right) \geq -f\left(\frac{1}{x_0}\right)$$

Trường hợp 2. n chẵn, khi đó dễ thấy $\min P(a, b, c) = 0$ và $P(a, b, c)$ là một biểu thức đối xứng với a, b, c, do đó không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Nếu $n \geq 4$, đặt $b = t + s, c = t - s$ ($t \geq m \geq 0$ và xét hàm số

$$\alpha(s) = 2^n a s^n + (t+s)(a+s-t)^n + (t-s)(t+s-a)^n$$

Ta có

$$\begin{aligned}\alpha''(s) &= 2n((a+s-t)^{n-1} - (t+s-a)^{n-1}) + n(n-1)((t+s)(a+s-t)^{n-2} + (t-s)(t+s-a)^{n-2}) \\ &\quad + 2^n n(n-1)as^{n-2} \\ &= 4n(n-1)a(b-c)^{n-2} + 2n((a-b)^{n-1} + (a-c)^{n-1}) + n(n-1)(c(a-b)^{n-2} + b(a-c)^{n-2}) \geq 0\end{aligned}$$

Suy ra $\alpha(s)$ là hàm lồi, do đó

$$\alpha(s) \leq \max\{\alpha(t), \alpha(0)\}$$

Như vậy, ta chỉ cần xét bài toán trong trường hợp $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$ hoặc $abc = 0$.

(i) $abc = 0$, không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c = 0$, ta cần tìm giá trị lớn nhất của $P(a, b, c) = a^n b + ab^n = \frac{a^n b + ab^n}{(a+b)^{n+1}} = \frac{y^n + y}{(y+1)^{n+1}} = u(y)$ với $y = \frac{b}{a} \leq 1$. Ta có

$$u'(y) = \frac{(1-y)(y^{n-1} - (n-1)y^{n-2} - \ldots - (n-1)y + 1)}{(y+1)^{n+2}}$$

Từ đây, ta dễ dàng suy ra được $u'(y) = 0$ chỉ có 2 nghiệm là 1 và $y_0 \in (0, 1)$ và như thế, ta có thể kiểm tra được

$$u(y) \leq u(y_0)$$

(ii) $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$, không mất tính tổng quát, giả sử $b = c$, ta có $a + 2b = 1$ và $P(a, b, c) = 2b(a-b)^n$. Nếu $a \leq b$ thì $P(a, b, c) = 2b(b-a)^n \leq 2b^{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$, nếu $a \geq b$ thì sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$P(a, b, c) = 2b(a-b)^n = \frac{2}{3}n^n \cdot 3b \cdot \left(\frac{a-b}{n}\right)^n \leq \frac{n^n(a-b+3b)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2n^n}{3(n+1)^{n+1}}$$

Nếu $n = 2$ thì ta có $P(a, b, c) = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 = ab + bc + ca - 9abc$. Nếu $ab + bc + ca \leq \frac{1}{4}$ thì hiển nhiên $P(a, b, c) \leq \frac{1}{4}$, nếu $ab + bc + ca \geq \frac{1}{4}$ thì sử dụng bất đẳng thức Schur, ta có

$$P(a, b, c) = ab + bc + ca - 9abc \leq ab + bc + ca - (4(ab + bc + ca) - 1) = 1 - 3(ab + bc + ca) \leq \frac{1}{4}$$

Từ đây, ta dễ dàng đi đến kết luận của bài toán.

♡♡♡

50 *Cho các số dương* a, b, c *thỏa* $a+b+c=3$*, tìm hằng số* k *lớn nhất sao cho*

$$\frac{a^5+b^5+c^5-3}{a^3+b^3+c^3-3} \geq k$$

Lời giải. Cho $a=b=3-\sqrt{3}, c=2\sqrt{3}-3$, ta suy ra được $k \leq \frac{5\left(5\sqrt{3}-7\right)}{\sqrt{3}+1}$, ta sẽ chứng minh đây chính là giá trị cần tìm, tức là

$$\sum_{cyc}\left(a^5-\frac{5\left(5\sqrt{3}-7\right)}{\sqrt{3}+1}a^3+\frac{24\sqrt{3}-36}{\sqrt{3}+1}\right) \geq 0$$

Hay

$$\sum_{cyc}(a-1)^2\left(a^3+2a^2+\frac{38-22\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}a+\frac{2\left(37-23\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}+1}\right) \geq 0$$

Hay

$$\sum_{cyc}(4M_a+M_b+M_c)(a-b)(a-c) \geq 0$$

trong đó

$$M_a = a^3+2a^2+\frac{38-22\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}a+\frac{2\left(37-23\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}+1}$$
$$M_b = b^3+2b^2+\frac{38-22\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}b+\frac{2\left(37-23\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}+1}$$
$$M_c = c^3+2c^2+\frac{38-22\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}c+\frac{2\left(37-23\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}+1}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
4M_a+M_b+M_c &= 4a^3+b^3+c^3+2(4a^2+b^2+c^2)+\frac{3\left(38-22\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}+1}a+\frac{9\left(62-38\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}+1} \\
&\geq 4a^3+\frac{(b+c)^3}{4}+8a^2+(b+c)^2+\frac{3\left(38-22\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}+1}a+\frac{9\left(62-38\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}+1} \\
&= 4a^3+\frac{(3-a)^3}{4}+8a^2+(3-a)^2+\frac{3\left(38-22\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}+1}a+\frac{9\left(62-38\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}+1} \\
&= \frac{15\left(a+3-2\sqrt{3}\right)^2\left(a-3+4\sqrt{3}\right)}{4} \geq 0
\end{aligned}$$

Tương tự, ta có $4M_b+M_c+M_a, 4M_c+M_a+M_b \geq 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0$, suy ra $a+b \geq 2$, ta có

$$\begin{aligned}
(4M_a+M_b+M_c)-(4M_b+M_c+M_a) = 3(M_a-M_b) &= 3(a^3-b^3)+6(a-b)\left(a+b+\frac{19-11\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right) \\
&\geq 3(a^3-b^3)+6(a-b)\left(2+\frac{19-11\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right) \geq 0
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\sum_{\text{cyc}}(4M_a+M_b+M_c)(a-b)(a-c) = (a-b)((4M_a+M_b+M_c)(a-c)-(4M_b+M_c+M_a)(b-c)) + (4M_c+M_a+M_b)(a-c)(b-c) \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Vậy

$$k_{\max} = \frac{5\left(5\sqrt{3}-7\right)}{\sqrt{3}+1}.$$

♡♡♡

51 [**Nguyễn Phi Hùng**] *Cho các số không âm a, b, c thỏa $a^2+b^2+c^2=8$, chứng minh bất đẳng thức*

$$4(a+b+c-4) \leq abc$$

Lời giải. Đặt $x = a+b+c, y = ab+bc+ca$ thì ta có $x^2-2y=8$. Sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 4, ta có

$$abc \geq \frac{(4y-x^2)(x^2-y)}{6x} = \frac{(x^2-16)(x^2+8)}{12x}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(x^2-16)(x^2+8)}{12x} \geq 4(x-4)$$

Hay

$$\frac{(x-4)^2(x^2+8x-8)}{12x} \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng, vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=2, c=0$ và các hoán vị.

♡♡♡

52 *Cho m, n $(3n^2 > m^2)$ là các số thực cho trước và a, b, c là các số thực thỏa mãn $a+b+c = m, a^2+b^2+c^2=n^2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau*

$$P = a^2b+b^2c+c^2a$$

Lời giải. Đặt $a = x+\frac{m}{3}, b = y+\frac{m}{3}, c = z+\frac{m}{3}$, thế thì điều kiện bài toán cho ta $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2 = \frac{3n^2-m^2}{3}$. Biểu thức P trở thành

$$P = x^2y+y^2z+z^2x+\frac{m^3}{9}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{\text{cyc}}\left(3x\sqrt{\frac{2}{3n^2-m^2}} - \frac{18}{3n^2-m^2}xy-1\right)^2 \\
&= 3 + \frac{18}{3n^2-m^2}\left(\sum_{\text{cyc}}x\right)^2 + \frac{324}{(3n^2-m^2)^2}\sum_{\text{cyc}}x^2y^2 - 6\sqrt{\frac{2}{3n^2-m^2}}\sum_{\text{cyc}}x - 54\left(\frac{2}{3n^2-m^2}\right)^{3/2}\sum_{\text{cyc}}x^2y \\
&= 3 + \frac{324}{(3n^2-m^2)^2}\sum_{\text{cyc}}x^2y^2 - 54\left(\frac{2}{3n^2-m^2}\right)^{3/2}\sum_{\text{cyc}}x^2y
\end{aligned}$$

Do $x+y+z=0$ nên $xy+yz+zx = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) = -\frac{3n^2-m^2}{6}$, suy ra

$$\sum_{\text{cyc}}x^2y^2 = \left(\sum_{\text{cyc}}xy\right)^2 - 2xyz\sum_{\text{cyc}}x = \left(\sum_{\text{cyc}}xy\right)^2 = \frac{(3n^2-m^2)^2}{36}$$

Do đó

$$12 - 54\left(\frac{2}{3n^2 - m^2}\right)^{3/2} \sum_{\text{cyc}} x^2 y \geq 0$$

Suy ra

$$\sum_{\text{cyc}} x^2 y \leq \frac{2}{9}\left(\frac{3n^2 - m^2}{2}\right)^{3/2}$$

Vậy

$$P \leq \frac{2}{9}\left(\frac{3n^2 - m^2}{2}\right)^{3/2} + \frac{m^3}{9}$$

Mặt khác, cho $x = \frac{\sqrt{2(3n^2-m^2)}}{3}\cos\frac{2\pi}{9}, y = \frac{\sqrt{2(3n^2-m^2)}}{3}\cos\frac{4\pi}{9}, z = \frac{\sqrt{2(3n^2-m^2)}}{3}\cos\frac{8\pi}{9}$, ta có

$$P = \frac{2}{9}\left(\frac{3n^2 - m^2}{2}\right)^{3/2} + \frac{m^3}{9}$$

Vậy

$$\max P = \frac{2}{9}\left(\frac{3n^2 - m^2}{2}\right)^{3/2} + \frac{m^3}{9}$$

Hoàn toàn tương tự, bằng cách xét biểu thức $\sum_{\text{cyc}}\left(3x\sqrt{\frac{2}{3n^2-m^2}} + \frac{18}{3n^2-m^2}xy + 1\right)^2$, ta dễ dàng suy ra được

$$\min P = -\frac{2}{9}\left(\frac{3n^2 - m^2}{2}\right)^{3/2} - \frac{m^3}{9}$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

♡♡♡

53 *Tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho với mọi $a, b, c \geq 0$ thì*

$$\sqrt{\frac{a^3}{ka^2 + (b+c)^2}} + \sqrt{\frac{b^3}{kb^2 + (c+a)^2}} + \sqrt{\frac{c^3}{kc^2 + (a+b)^2}} \leq \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{k+4}}$$

Lời giải. Cho $a = b = 1, c = 0$, suy ra $k \geq 5$. Ta sẽ chứng minh đây là giá trị cần tìm, tức là

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^3}{5a^2 + (b+c)^2}} \leq \sqrt{\frac{a+b+c}{3}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^3}{5a^2 + (b+c)^2}}\right)^2 \leq \left(\sum_{\text{cyc}} a\right)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2}\right)$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} \leq \frac{1}{3}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a + b + c = 1$ và $a \geq b \geq c \geq 0$, suy ra $a \geq \frac{1}{3} \geq c$. Bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{6a^2 - 2a + 1} \leq \frac{1}{3}$$

Xét 2 trường hợp

+, Nếu $c \ge \frac{1}{8}$, ta có

$$9 - \sum_{cyc} \frac{27a^2}{6a^2-2a+1} = \sum_{cyc} \left(12a - 1 - \frac{27a^2}{6a^2-2a+1}\right) = \sum_{cyc} \frac{(3a-1)^2(8a-1)}{6a^2-2a+1} \ge 0$$

+, Nếu $c \le \frac{1}{8}$, ta có

$$\begin{aligned} 6(VT-VP) &= \frac{2a-1}{6a^2-2a+1} + \frac{2b-1}{6b^2-2b+1} + \frac{6c^2}{6c^2-2c+1} \\ &= \frac{a-b-c}{6a^2-2a+1} + \frac{b-c-a}{6b^2-2b+1} + \frac{6c^2}{6c^2-2c+1} \\ &= \frac{2(a-b)^2(3c-2)}{(6a^2-2a+1)(6b^2-2b+1)} + c\left(\frac{6c}{6c^2-2c+1} - \frac{1}{6a^2-2a+1} - \frac{1}{6b^2-2b+1}\right) \end{aligned}$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{1}{6a^2-2a+1} + \frac{1}{6b^2-2b+1} \ge \frac{6c}{6c^2-2c+1}$$

Do $c \le \frac{1}{8}$ nên $\frac{6c}{6c^2-2c+1} \le 1$, suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{6a^2-2a+1} + \frac{1}{6b^2-2b+1} \ge 1$$

++, Nếu $b \le \frac{1}{3}$ thì

$$\frac{1}{6b^2-2b+1} \ge 1$$

++, Nếu $b \ge \frac{1}{3}$, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta chỉ cần chứng minh

$$4 \ge 6(a^2+b^2) - 2(a+b) + 2$$

Hay

$$(2(a+b)+c)(a+b+c) \ge 3(a^2+b^2)$$

Do $b \ge \frac{1}{3}$ nên $3b \ge a$, do đó

$$\begin{aligned} (2(a+b)+c)(a+b+c) \ge 2(a+b)^2 &= 3(a^2+b^2) + 4ab - a^2 - b^2 \\ &\ge 3(a^2+b^2) + 3ab - a^2 \ge 3(a^2+b^2) \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Vậy

$$k_{\min} = 5.$$

♡♡♡

54 *Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ và $a+b+c = 3$ thì*

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b^2+9} + \frac{b}{c^2+9} + \frac{c}{a^2+9}\right) \le \frac{9}{10}$$

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b^2+9} \le \frac{9}{10(ab+bc+ca)}$$

Hay

$$\frac{9}{10(ab+bc+ca)} + \frac{1}{9}\sum_{\text{cyc}} \frac{ab^2}{b^2+9} \geq \frac{1}{3}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab^2}{b^2+9} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{ab^2+bc^2+ca^2+27}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{9}{10(ab+bc+ca)} + \frac{(ab+bc+ca)^2}{9(ab^2+bc^2+ca^2+27)} \geq \frac{1}{3}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM,

$$\frac{2}{5(ab+bc+ca)} + \frac{(ab+bc+ca)^2}{9(ab^2+bc^2+ca^2+27)} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{9\cdot 10^4(ab+bc+ca)^2(ab^2+bc^2+ca^2+27)}}$$

Lại sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz và bất đẳng thức AM–GM, ta được

$$\begin{aligned}(ab+bc+ca)^4(ab^2+bc^2+ca^2)^2 &\leq (ab+bc+ca)^4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(a^2+b^2+c^2)\\ &\leq 27(ab+bc+ca)^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\end{aligned}$$

Đặt $x = ab+bc+ca$, theo bất đẳng thức AM–GM và bất đẳng thức Schur, $x \leq 3, abc \geq \frac{4x-9}{3}$. Suy ra

$$\begin{aligned}(ab+bc+ca)^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) &= x^2(x^2-6abc) \leq x^2(x^2-8x+18)\\ &= (x-3)^3(x+1)+27 \leq 27\end{aligned}$$

Do đó

$$(ab+bc+ca)^2(ab^2+bc^2+ca^2) \leq 27$$

Suy ra

$$\frac{2}{5(ab+bc+ca)} + \frac{(ab+bc+ca)^2}{9(ab^2+bc^2+ca^2+27)} \geq \frac{1}{6}$$

Và như thế

$$\frac{9}{10(ab+bc+ca)} + \frac{(ab+bc+ca)^2}{9(ab^2+bc^2+ca^2+27)} \geq \frac{1}{3}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

♡♡♡

55 *Cho các số dương a,b,c thỏa $a+b+c=3$, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta cần chứng minh

$$\left(\sum_{\text{cyc}} ab\right)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{c^2+3}\right) \leq \frac{9}{4}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Đặt $a+b=2t, a-b=2m$, suy ra $\frac{3}{2} > t \geq 1, c = 3-2t$, xét hàm số

$$f(m) = \frac{t^2-m^2}{3+c^2} + \frac{c(t+m)}{3+(t-m)^2} + \frac{c(t-m)}{3+(t+m)^2}$$

Ta có

$$f'(m) = 2c(t^2-m^2)\left(\frac{1}{(3+(t-m)^2)^2} - \frac{1}{(3+(t+m)^2)^2}\right) - \frac{2m}{3+c^2}$$
$$+ c\left(\frac{1}{3+(t-m)^2} - \frac{1}{3+(t+m)^2}\right)$$
$$= \frac{c(a^2-b^2)}{(3+a^2)(3+b^2)} + \frac{2abc(a^2-b^2)(a^2+b^2+6)}{(3+a^2)^2(3+b^2)^2} - \frac{a-b}{3+c^2}$$
$$= (a-b)\left(\frac{c(a+b)}{(3+a^2)(3+b^2)} + \frac{2abc(a+b)(a^2+b^2+6)}{(3+a^2)^2(3+b^2)^2} - \frac{1}{3+c^2}\right)$$

Ta sẽ chứng minh $f'(m) \le 0$, hay

$$\frac{c(a+b)}{(3+a^2)(3+b^2)} + \frac{2abc(a+b)(a^2+b^2+6)}{(3+a^2)^2(3+b^2)^2} \le \frac{1}{3+c^2}$$

Chú ý rằng $(3+a^2)(3+b^2) \ge \left(3+t^2\right)^2$ do $a+b<3$ và $ab(a^2+b^2) \le 2t^4$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{2tc}{(3+t^2)^2} + \frac{8t^3c}{(3+t^2)^3} \le \frac{1}{3+c^2}$$

Hay

$$\frac{2t(3-2t)}{(3+t^2)^2} + \frac{8t^3(3-2t)}{(3+t^2)^3} \le \frac{1}{3+(3-2t)^2}$$
$$9(t-1)(9t^5-31t^4+42t^3-22t^2+21t-3) \ge 0$$

Bất đẳng thức này đúng do $\frac{3}{2} > t \ge 1$. Do đó, $f(m)$ là hàm không tăng, suy ra

$$f(m) \le f(0) = \frac{t^2}{3+c^2} + \frac{2tc}{3+t^2}$$

Mặt khác, dễ thấy $ab+bc+ca \le t(t+2c)$. Ta còn phải chứng minh

$$t(t+2c)\left(\frac{t^2}{3+c^2} + \frac{2tc}{3+t^2}\right) \le \frac{9}{4}$$

Hay

$$t(t+2(3-2t))\left(\frac{t^2}{3+(3-2t)^2} + \frac{2t(3-2t)}{3+t^2}\right) \le \frac{9}{4}$$
$$(t-1)^2(5t^4-24t^3+33t^2-9t-9) \le 0$$

Bất đẳng thức đúng do $\frac{3}{2} > t \ge 1$.

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

♡♡♡

56 *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương thì*

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}} \ge \sqrt{\frac{16(a+b+c)^3}{3(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta được

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{b+c}{a}}\right)^2 \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^2(b+c)}\right) \ge \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a}\right)^3$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a}\right)^3 \geq \frac{16(a+b+c)^3}{3(a+b)(b+c)(c+a)} \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^2(b+c)}$$

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$, bất đẳng thức trở thành

$$(x+y+z)^3 \geq \frac{16(xy+yz+zx)^3}{3(x+y)(y+z)(z+x)} \sum_{\text{cyc}} \frac{x}{y+z}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz \geq \frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{(x+y+z)^4}{xy+yz+zx} \geq 6(xy+yz+zx) \sum_{\text{cyc}} \frac{x}{y+z}$$

Hay

$$\frac{(x+y+z)^4}{xy+yz+zx} \geq 6(x^2+y^2+z^2) + 6xyz \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{y+z}$$

Lại sử dụng bất đẳng thức AM–GM,

$$\frac{4}{y+z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \qquad \frac{4}{z+x} \leq \frac{1}{z} + \frac{1}{x}, \qquad \frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Suy ra

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{y+z} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{xy+yz+zx}{2xyz}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(x+y+z)^4}{xy+yz+zx} \geq 6(x^2+y^2+z^2) + 3(xy+yz+zx)$$

Hay

$$\frac{(x+y+z)^4}{xy+yz+zx} \geq 6(x+y+z)^2 - 9(xy+yz+zx)$$

$$\frac{((x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx))^2}{xy+yz+zx} \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

♡♡♡

57 *Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng*

$$\frac{1}{a(1+bc)^2} + \frac{1}{b(1+ca)^2} + \frac{1}{c(1+ab)^2} \leq \frac{k}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)} + \frac{3}{4} - \frac{k}{8}$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa $abc = 1$.

Lời giải. Cho $a = 2, b = 1, c = \frac{1}{2}$, ta có $k \le 4$. Ta sẽ chứng minh

$$4\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a(1+bc)^2} \le 1 + \frac{16}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}$$

Hay

$$4\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{(a+1)^2} \le 1 + \frac{16}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

Đặt $x = \frac{1-a}{1+a}, y = \frac{1-b}{1+b}, z = \frac{1-c}{1+c}$, thì $x, y, z \in [-1, 1]$ và

$$(1-x)(1-y)(1-z) = (1+x)(1+y)(1+z)$$

Suy ra

$$x + y + z + xyz = 0$$

Bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{\text{cyc}} (1-x^2) \le 1 + 2(1+x)(1+y)(1+z)$$

Hay

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) + 2(x + y + z + xyz) \ge 0$$

$$(x+y+z)^2 \ge 0$$

Vậy ta có đpcm, do đó

$$k_{\max} = 4.$$

♡♡♡

58 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức sau với $k = \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$*

$$\left(\frac{a^2}{b^2+bc+c^2}\right)^{1/k} + \left(\frac{b^2}{c^2+ca+a^2}\right)^{1/k} + \left(\frac{c^2}{a^2+ab+b^2}\right)^{1/k} \ge 2$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a^2}{b^2+bc+c^2}\right)^{1/k}\right)^k \left(\sum_{\text{cyc}} a(b^2+bc+c^2)\right) \ge (a^{3/(k+1)} + b^{3/(k+1)} + c^{3/(k+1)})^{k+1}$$

Ta phải chứng minh

$$(a^{3/(k+1)} + b^{3/(k+1)} + c^{3/(k+1)})^{k+1} \ge 2^k (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$, đặt $a = t + m, b = t - m$ với $t \ge m + c, m \ge 0$, xét hàm số

$$f(m) = (k+1)\ln\left((t+m)^{3/(k+1)} + (t-m)^{3/(k+1)} + c^{3/(k+1)}\right) - \ln\left(t^2 + 2tc - m^2\right)$$

Ta có

$$\begin{aligned} f'(m) &= \frac{3((t+m)^{(2-k)/(k+1)} - (t-m)^{(2-k)/(k+1)})}{(t+m)^{3/(k+1)} + (t-m)^{3/(k+1)} + c^{3/(k+1)}} + \frac{2m}{t^2+2tc-m^2} \\ &= \frac{3(a^{(2-k)/(k+1)} - b^{(2-k)/(k+1)})}{a^{3/(k+1)} + b^{3/(k+1)} + c^{3/(k+1)}} + \frac{a-b}{ab+bc+ca} \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh $f'(m) \ge 0$, đặt $a = x^{k+1}, b = y^{k+1}, c = z^{k+1}$ $(x \ge y \ge z \ge 0)$, ta phải chứng minh

$$\frac{x^{k-2}y^{k-2}(x^{k+1}-y^{k+1})}{x^{k+1}y^{k+1}+y^{k+1}z^{k+1}+z^{k+1}x^{k+1}} - \frac{3(x^{k-2}-y^{k-2})}{x^3+y^3+z^3} \ge 0$$

Dễ thấy rằng do $x \ge y$ và $k > 2$ nên $x^{k+1} - y^{k+1} \ge \frac{k+1}{k-2}y^3(x^{k-2}-y^{k-2})$, như thế ta cần chứng minh

$$\frac{k+1}{k-2}x^{k-2}y^{k+1}(x^3+y^3+z^3) \ge 3(x^{k+1}y^{k+1}+y^{k+1}z^{k+1}+z^{k+1}x^{k+1})$$

Hay

$$\frac{7-2k}{k-2}x^{k+1}y^{k+1} - 3x^{k+1}z^{k+1} + \frac{k+1}{k-2}x^{k-2}y^{k+4} + \left(\frac{k+1}{k-2}x^{k-2} - 3z^{k-2}\right)y^{k+1}z^3 \ge 0$$

Như thế, nếu $\frac{k+1}{k-2}x^{k-2}y^{k+4} \ge x^{k+1}z^{k+1}$ thì do $x \ge y$ và $\frac{7-2k}{k-2} > 2$ nên bất đẳng thức đúng. Xét trường hợp ngược lại, $\frac{k+1}{k-2}x^{k-2}y^{k+4} \le x^{k+1}z^{k+1}$, suy ra $x \ge \sqrt[3]{\frac{k+1}{k-2}}y \ge \sqrt[3]{4}y$, khi đó ta có $x^{k+1} - y^{k+1} \ge 6y^3(x^{k-2}-y^{k-2})$, vậy nên ta cần chứng minh

$$2x^{k-2}y^{k+1}(x^3+y^3+z^3) \ge (x^{k+1}y^{k+1}+y^{k+1}z^{k+1}+z^{k+1}x^{k+1})$$

Hay

$$x^{k+1}(y^{k+1}-z^{k+1}) + 2x^{k-2}y^{k+4} + (2x^{k-2}-z^{k-2})y^{k+1}z^3 \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy ta luôn có $f'(m) \ge 0$, và như vậy, ta chỉ cần xét bất đẳng thức đã cho trong trường hợp $a = b \ge c$ là đủ, tức là ta phải chứng minh

$$(2a^{3/(k+1)} + c^{3/(k+1)})^{k+1} \ge 2^k a(a+2c)(2a+c)$$

Đặt $u = \left(\frac{c}{a}\right)^{1/(k+1)} \le 1$, ta cần chứng minh

$$g(u) = \frac{(u^3+2)^{k+1}}{(u^{k+1}+2)(2u^{k+1}+1)} \ge 2^k$$

Có thể dễ dàng kiểm tra được bất đẳng thức trên. Vậy ta có đpcm.

♡♡♡

59 *Cho các số không âm a, b, c chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{\frac{a^2+bc}{b^2+bc+c^2}} + \sqrt{\frac{b^2+ca}{c^2+ca+a^2}} + \sqrt{\frac{c^2+ab}{a^2+ab+b^2}} \ge \sqrt{6}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2+bc}{b^2+bc+c^2}}\right)^2 \left(\sum_{cyc}(a^2+bc)^2(b^2+bc+c^2)\right) \ge (a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^3$$

Ta cần chứng minh

$$(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^3 \ge 6\sum_{cyc}(a^2+bc)^2(b^2+bc+c^2)$$

Hay

$$(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^3 \ge 12\sum_{cyc}a^2b^2(a^2+b^2) + 6\sum_{cyc}a^3b^3 + 6\sum_{cyc}a^4bc + 12\sum_{cyc}a^2b^2c(a+b) + 36a^2b^2c^2$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$, đặt $ab+bc+ca=\frac{1-q^2}{3}, r=abc$ thì ta có $1\ge q\ge 0$ và $r\ge \max\left\{0, \frac{(1-2q)(1+q)^2}{27}\right\}$, bất đẳng thức trở thành

$$-2(4q^2+5)r+\frac{17}{27}q^6-\frac{8}{9}q^4-\frac{20}{9}q^2+\frac{10}{27}\le 0$$

Nếu $2q\ge 1$ thì ta có $\frac{17}{27}q^6-\frac{8}{9}q^4-\frac{20}{9}q^2+\frac{10}{27}\le 0$ nên bất đẳng thức hiển nhiên đúng, nếu $2q\le 1$ thì ta có

$$\begin{aligned} VT &\le -\frac{2}{27}(4q^2+5)(1-2q)(q+1)^2+\frac{17}{27}q^6-\frac{8}{9}q^4-\frac{20}{9}q^2+\frac{10}{27} \\ &= \frac{1}{27}q^2(17q^4+16q^3+20q-38)\le 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

60 *Chứng minh rằng với mọi $x,y\in[0,1]$, ta có*

$$\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{y^2-y+1}\ge 1+\frac{1}{x^2y^2-xy+1}$$

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\left(1-\frac{1}{x^2-x+1}\right)\left(1-\frac{1}{y^2-y+1}\right)\le\frac{1}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}-\frac{1}{x^2y^2-xy+1}$$

Hay

$$\frac{xy(1-x)(1-y)}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}\le\frac{(1-x)(1-y)(x+y)}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)(x^2y^2-xy+1)}$$

$$x+y\ge xy(x^2y^2-xy+1)$$

Do $x,y\le 1$ nên $x^2y^2-xy+1\le 1$, do đó

$$x+y-xy(x^2y^2-xy+1)\ge x+y-xy=x(1-y)+y\ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

♡♡♡

61 *Cho các số dương a,b,c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh rằng

$$\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\ge 2\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2}{a+c}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} (VT-VP)(a+b+c)=3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2+b^2}{a+b} &= a^2+b^2+c^2-\sum_{\text{cyc}}\frac{c(a^2+b^2)}{a+b} \\ &= \sum_{\text{cyc}}\frac{ab(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}\ge 0 \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức này và bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{a+b}}\right)^2\left(\sum_{cyc}a(a+b)(a+c)\right)\\
&\geq 2\left(\sum_{cyc}\frac{a^2}{a+c}\right)\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{a+b}}\right)^2\left(\sum_{cyc}a(a+b)(a+c)\right)\\
&\geq 2(a+b+c)^4
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$4(a+b+c)^5 \geq 27(ab+bc+ca)\sum_{cyc}a(a+b)(a+c)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$, đặt $ab+bc+ca=\frac{1-q^2}{3}, r=abc$ $(1\geq q\geq 0)$, thế thì ta có $r\leq \frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}$, bất đẳng thức trở thành

$$4\geq (1-q^2)(6q^2+3+27r)$$

Ta có

$$4-(1-q^2)(6q^2+3+27r)\geq 4-(1-q^2)(6q^2+3+(1-q)^2(1+2q)) = q^2(2q^3+2q^2+(q-1)^2)\geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

62 *Chứng minh rằng với mọi $a,b,c\geq 0$, ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a^2(b+c)}{(b^2+c^2)(2a+b+c)}+\frac{b^2(c+a)}{(c^2+a^2)(2b+c+a)}+\frac{c^2(a+b)}{(a^2+b^2)(2c+a+b)}\geq\frac{2}{3}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a^2(b+c)}{(b^2+c^2)(2a+b+c)}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a^2(b^2+c^2)(2a+b+c)}{b+c}\right)\geq (a^2+b^2+c^2)^2$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$3(a^2+b^2+c^2)^2\geq 2\sum_{cyc}\frac{a^2(b^2+c^2)(2a+b+c)}{b+c}$$

Hay

$$3\sum_{cyc}a^4+2\sum_{cyc}a^2b^2\geq 4\sum_{cyc}\frac{a^3(b^2+c^2)}{b+c}$$

$$3\sum_{cyc}\left(a^4-\frac{a^3(b^2+c^2)}{b+c}\right)+\sum_{cyc}\left(a^2(b^2+c^2)-\frac{a^3(b^2+c^2)}{b+c}\right)\geq 0$$

$$3\sum_{cyc}\frac{a^3b(a-b)-ca^3(c-a)}{b+c}+\sum_{cyc}\frac{a^2(b^2+c^2)(b+c-a)}{b+c}\geq 0$$

$$3\sum_{cyc}\frac{ab(a-b)^2(a^2+b^2+ab+bc+ca)}{(a+c)(b+c)}+\sum_{cyc}\frac{a^2(b^2+c^2)(b+c-a)}{b+c}\geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c \ge 0$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
VT &\ge \frac{2ab(a-b)^2(a^2+b^2+ab+bc+ca)}{(a+c)(b+c)} + \frac{a^2(b^2+c^2)(b-a)}{b+c} + \frac{b^2(a^2+c^2)(a-b)}{a+c} \\
&= \frac{(a-b)^2(2ab(a^2+b^2+ab+bc+ca) - (a^2b^2+(a^2+b^2+ab)c^2+(a+b)c^3))}{(a+c)(b+c)} \\
&\ge \frac{(a-b)^2(2ab(a^2+b^2+ab+bc+ca) - (a^2b^2+(a^2+b^2+ab)ab+(a+b)abc))}{(a+c)(b+c)} \\
&= \frac{ab(a-b)^2(a^2+b^2+ac+bc)}{(a+c)(b+c)} \ge 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) \sim (1,1,0)$.

♡♡♡

63 *Cho các số dương a,b,c, chứng minh rằng với mọi $k \ge 2$, ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \ge \sqrt[k]{\frac{a+c}{b+c}} + \sqrt[k]{\frac{c+b}{a+b}} + \sqrt[k]{\frac{b+a}{c+a}}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\left(\sum_{cyc} \sqrt[k]{\frac{a+c}{b+c}}\right)^{\frac{k}{2}} \le 3^{\frac{k}{2}-1} \sum_{cyc} \sqrt{\frac{a+c}{b+c}}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM–GM thì

$$\left(\sum_{cyc} \sqrt[k]{\frac{a+c}{b+c}}\right)^{\frac{k}{2}} = \left(\sum_{cyc} \sqrt[k]{\frac{a+c}{b+c}}\right)\left(\sum_{cyc} \sqrt[k]{\frac{a+c}{b+c}}\right)^{\frac{k}{2}-1} \ge 3^{\frac{k}{2}-1} \sum_{cyc} \sqrt[k]{\frac{a+c}{b+c}}$$

Suy ra

$$\sum_{cyc} \sqrt[k]{\frac{a+c}{b+c}} \le \sum_{cyc} \sqrt{\frac{a+c}{b+c}}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{\sum_{cyc} a}{\sqrt[3]{abc}} \ge \sum_{cyc} \sqrt{\frac{a+c}{b+c}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta được

$$\left(\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a+c}{b+c}}\right)^2 \le 2\left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} \frac{1}{a+b}\right)$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} \ge \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a}$$

Hay

$$(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a) \ge 2\sqrt[3]{a^2b^2c^2}(a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$ab+bc+ca \ge 3\sqrt{a^2b^2c^2}, \qquad (a+b+c)(ab+bc+ca) \ge 9abc$$

Suy ra

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \\ &\geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca) \\ &\geq \frac{8}{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}(a+b+c)\end{aligned}$$

Do đó

$$(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}(a+b+c)^2$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{4}{3}(a+b+c)^2 \geq a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca$$

Hay

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \text{ (đúng theo AM–GM)}$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

64 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a+b}} \geq 2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}+1}$$

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}+1}$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{a(a+b)(a+c)} \geq 2\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

Hay

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{a(a+b)(a+c)}\right)^2 \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\sum_{\text{cyc}} a^3 + 2\sum_{\text{cyc}}(a+b)\sqrt{ab(a+c)(b+c)} \geq 3\sum_{\text{cyc}} ab(a+b) + 9abc$$

Sử dụng các bất đẳng thức AM–GM, Cauchy Schwarz và Schur, ta có

$$\begin{aligned}VT &\geq \sum_{\text{cyc}} a^3 + 2\sum_{\text{cyc}}(a+b)\left(ab + c\sqrt{ab}\right) = \sum_{\text{cyc}} a^3 + 2\sum_{\text{cyc}} ab(a+b) + 2\sqrt{abc}\sum_{\text{cyc}}\sqrt{c}(a+b) \\ &\geq \sum_{\text{cyc}} a^3 + 2\sum_{\text{cyc}} ab(a+b) + 12abc = \left(\sum_{\text{cyc}} a^3 + 3abc\right) + 2\sum_{\text{cyc}} ab(a+b) + 9abc \\ &\geq 3\sum_{\text{cyc}} ab(a+b) + 9abc\end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} \geq \sqrt{\frac{a^{2/3}}{b^{2/3}+c^{2/3}}}$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương

$$\frac{a^2}{(b+c)^2} \geq \frac{a^2}{(b^{2/3}+c^{2/3})^3}$$

Hay

$$(b^{2/3}+c^{2/3})^3 \geq (b+c)^2$$

$$3b^{2/3}c^{2/3}(b^{2/3}+c^{2/3}) \geq 2bc \text{ (đúng)}$$

Từ bất đẳng thức này, suy ra

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} \geq \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^{2/3}}{b^{2/3}+c^{2/3}}}$$

Theo trên thì

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^{2/3}}{b^{2/3}+c^{2/3}}} \geq 2\sqrt{\frac{a^{2/3}b^{2/3}c^{2/3}}{(a^{2/3}+b^{2/3})(b^{2/3}+c^{2/3})(c^{2/3}+a^{2/3})}+1}$$

Suy ra

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} \geq 2\sqrt{\frac{a^{2/3}b^{2/3}c^{2/3}}{(a^{2/3}+b^{2/3})(b^{2/3}+c^{2/3})(c^{2/3}+a^{2/3})}+1}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{\frac{a^{2/3}b^{2/3}c^{2/3}}{(a^{2/3}+b^{2/3})(b^{2/3}+c^{2/3})(c^{2/3}+a^{2/3})}+1} \geq \sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}+1}$$

Hay

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq a^{1/3}b^{1/3}c^{1/3}(a^{2/3}+b^{2/3})(b^{2/3}+c^{2/3})(c^{2/3}+a^{2/3})$$

$$(x^3+y^3)(y^3+z^3)(z^3+x^3) \geq xyz(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)$$

trong đó $x = a^{1/3}, y = b^{1/3}, z = c^{1/3}$.

Bất đẳng thức này chính là hệ quả của các bất đẳng thức hiển nhiên sau

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}, \qquad x^2-xy+y^2 \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \qquad \forall x,y \geq 0$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) \sim (1,1,0)$.

♡♡♡

65 *Cho các số thực a,b,c,d thỏa $a^2+b^2+c^2+d^2=4$, chứng minh bất đẳng thức*

$$9(a+b+c+d) \leq 4abcd+32$$

Lời giải. Dễ dàng kiểm tra được $\max\{abc,bcd,cda,dab\} < \frac{9}{4}$, do đó nếu tồn tại 1 trong 4 số a,b,c,d không lớn hơn 0, chẳng hạn $d \leq 0$, ta có

$$9(a+b+c+d)-4abcd = 9(a+b+c)+d(9-4abc) \leq 9(a+b+c) \leq 9\sqrt{3(a^2+b^2+c^2+d^2)} = 18\sqrt{3} < 32$$

Như vậy, ta chỉ còn phải xét bất đẳng thức trong trường hợp $a, b, c, d > 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $d = \min\{a, b, c, d\}$, suy ra $1 \geq d > 0$, đặt $P(a, b, c, d) = VT - VP, x = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ và $p = a + b + c$, thế thì ta có $2\sqrt{3} \geq 3x \geq p \geq x\sqrt{3}$, ta sẽ chứng minh $P(a, b, c, d) \leq P(x, x, x, d)$, thật vậy bất đẳng thức tương đương

$$9(3x - p) \geq 4d(x^3 - abc)$$

Từ bất đẳng thức Schur bậc 4 $\sum_{\text{cyc}} a^2(a-b)(a-c) \geq 0$, ta suy ra được $abc \geq \frac{(p^2-6x^2)(p^2+3x^2)}{12p}$, như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$9(3x - p) \geq 4d\left(x^3 - \frac{(p^2 - 6x^2)(p^2 + 3x^2)}{12p}\right)$$

Hay

$$(3x - p)\left(27 - \frac{d(p^3 + 3p^2x + 6px^2 + 6x^3)}{p}\right) \geq 0$$

Chú ý rằng $3x \geq p \geq x\sqrt{3}$ nên

$$81 - \frac{3d(p^3 + 3p^2x + 6px^2 + 6x^3)}{p} \geq 81 - 78x^2d = 81 - 26d(4 - d^2) = 3 + 26(1 - d)(3 - d - d^2) \geq 0$$

Như vậy bất đẳng thức đúng và ta còn phải chứng minh

$$9(3x + d) - 4x^3d \leq 32$$

Hay

$$(9 - 4x^3)\sqrt{4 - 3x^2} = d(9 - 4x^3) \leq 32 - 27x$$

$$f(x) = \frac{32 - 27x}{(9 - 4x^3)\sqrt{4 - 3x^2}} \geq 1$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{12(x - 1)(81x^4 - 47x^3 - 119x^2 + 9x + 81)}{(9 - 4x^3)^2(4 - 3x^2)^{3/2}} \geq 0$$

Suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến, do đó $f(x) \geq f(1) = 1$, vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

♡♡♡

66 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{\frac{a^2 + 256bc}{b^2 + c^2}} + \sqrt{\frac{b^2 + 256ca}{c^2 + a^2}} + \sqrt{\frac{c^2 + 256ab}{a^2 + b^2}} \geq 12$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$, xét các trường hợp sau

Trường hợp 1. $256b^3 \leq a^2c$, suy ra $a^2 \geq 256b^2$, do đó

$$\sqrt{\frac{a^2 + 256bc}{b^2 + c^2}} \geq 16\sqrt{\frac{b^2 + bc}{b^2 + c^2}} \geq 16 > 12$$

Trường hợp 2. $256b^3 \geq a^2c$, khi đó ta có

$$\frac{a^2 + 256bc}{b^2 + c^2} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c(256b^3 - a^2c)}{b^2(b^2 + c^2)} \geq \frac{a^2}{b^2}, \qquad \frac{b^2 + 256ca}{c^2 + a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c(256a^3 - b^2c)}{a^2(a^2 + c^2)} \geq \frac{b^2}{a^2}$$

Do đó

$$VT \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 16\sqrt{\frac{ab}{a^2 + b^2}} = \frac{a^2 + b^2}{ab} + 2 \cdot 8\sqrt{\frac{ab}{a^2 + b^2}} \geq 3\sqrt[3]{8^2} = 12$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) \sim \left(2 + \sqrt{3}, 1, 0\right)$.

♡♡♡

67 *Cho các số dương x, y, z có tích bằng 1, chứng minh rằng*

$$\frac{x}{y^4+2}+\frac{y}{z^4+2}+\frac{z}{x^4+2} \geq 1$$

Lời giải. Do $x, y, z > 0, xyz = 1$ nên tồn tại các số dương a, b, c sao cho $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{a}, z = \frac{b}{c}$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{a^5}{b(c^4+2a^4)} \geq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$VT \geq \frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{2(a^5b+b^5c+c^5a)+abc(a^3+b^3+c^3)}$$

Ta cần chứng minh

$$(a^3+b^3+c^3)^2 \geq 2(a^5b+b^5c+c^5a)+abc(a^3+b^3+c^3)$$

Hay

$$(a^3+b^3+c^3)^2-(ab+bc+ca)(a^4+b^4+c^4) \geq \sum_{cyc} a^5b - \sum_{cyc} ab^5$$

$$2\left(\sum_{cyc} a^3\right)^2 - \left(\sum_{cyc} a^2\right)\left(\sum_{cyc} a^4\right) + \left(\sum_{cyc} a^4\right)\left(2\sum_{cyc} a^2 - 2\sum_{cyc} ab\right) \geq 2\left(\sum_{cyc} a^5b - \sum_{cyc} ab^5\right)$$

$$\sum_{cyc}(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2)(a-b)^2 \geq 2(a-b)(b-c)(a-c)((a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+abc)$$

Từ đây, không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét $a \geq b \geq c$ là đủ. Đặt $a = a_1+t, b = b_1+t, c = c_1+t$ với $t \geq -c_1$, xét hàm số

$$f(t) = \sum_{cyc}((a_1+t)^4+(b_1+t)^4+(c_1+t)^4-2(a_1+t)^2(b_1+t)^2)(a-b)^2$$
$$+2\prod_{cyc}(a-b)\left(\left(\sum_{cyc}(a_1+t)\right)\left(\sum_{cyc}(a_1+t)^2\right)+(a_1+t)(b_1+t)(c_1+t)\right)$$

Ta có

$$f'(t) = 4\sum_{cyc}((a_1+t)^3+(b_1+t)^3+(c_1+t)^3-(a_1+t)^2(b_1+t)-(a_1+t)(b_1+t)^2)(a-b)^2$$
$$+2\prod_{cyc}(a-b)\left(3\sum_{cyc}(a_1+t)^2+2\left(\sum_{cyc}(a_1+t)\right)^2+\sum_{cyc}(a_1+t)(b_1+t)\right)$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= 4\sum_{cyc}(2(a_1+t)^2+2(b_1+t)^2+3(c_1+t)^2-4(a_1+t)(b_1+t))(a-b)^2 \\ &\quad + 24\prod_{cyc}(a-b)\sum_{cyc}(a_1+t) \\ &= 4\sum_{cyc}(2a^2+2b^2+3c^2-4ab)(a-b)^2 - 24(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c) \\ &= 2\sum_{cyc}(2a^2-2b^2+5bc-3ca-2ab)^2+6\sum_{cyc} c^2(a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra $f'(t)$ là hàm đồng biến, do đó

$$f'(t) \geq f'(-c_1) = 2(4x^5 - 11x^4y + 6x^3y^2 + 6x^2y^3 - xy^4 + 4y^5) \geq 0$$

trong đó $x = a_1 - c_1, y = b_1 - c_1$. Như vậy $f(t)$ là hàm đồng biến, suy ra

$$f(t) \geq f(-c_1) = x^6 - 2x^5y + 2x^3y^3 + y^6 \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

♡♡♡

68 *Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c, d ta có bất đẳng thức*

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+d} + \frac{1}{d+a}\right) \geq \frac{16}{abcd+1}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\begin{aligned} VT &= \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{cd}\right) + \left(\frac{a+b}{ab(c+d)} + \frac{c+d}{cd(a+b)}\right) + \frac{a+b}{ab(d+a)} + \frac{a+b}{ab(b+c)} + \frac{c+d}{cd(b+c)} + \frac{c+d}{cd(d+a)} \\ &\geq \frac{4}{\sqrt{abcd}} + \frac{a+b}{ab(d+a)} + \frac{a+b}{ab(b+c)} + \frac{c+d}{cd(b+c)} + \frac{c+d}{cd(d+a)} \end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$VT \geq \frac{4}{\sqrt{abcd}} + \frac{b+c}{bc(a+b)} + \frac{b+c}{bc(c+d)} + \frac{a+d}{ad(a+b)} + \frac{a+d}{ad(c+d)}$$

Do đó

$$\begin{aligned} 2VT &\geq \frac{8}{\sqrt{abcd}} + \left(\frac{a+b}{ab(d+a)} + \frac{a+d}{ad(a+b)}\right) + \left(\frac{a+b}{ab(b+c)} + \frac{b+c}{bc(a+b)}\right) \\ &\quad + \left(\frac{c+d}{cd(b+c)} + \frac{b+c}{bc(c+d)}\right) + \left(\frac{c+d}{cd(d+a)} + \frac{a+d}{ad(c+d)}\right) \\ &\geq \frac{8}{\sqrt{abcd}} + \frac{2}{a\sqrt{bd}} + \frac{2}{b\sqrt{ca}} + \frac{2}{c\sqrt{bd}} + \frac{2}{d\sqrt{ca}} \\ &= \frac{8}{\sqrt{abcd}} + \frac{2}{\sqrt{bd}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + \frac{2}{\sqrt{ac}}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right) \geq \frac{16}{\sqrt{abcd}} \end{aligned}$$

Suy ra

$$VT \geq \frac{8}{\sqrt{abcd}} \geq \frac{16}{abcd+1}$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

♡♡♡

69 *Cho các số dương a, b, c, d thỏa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a+b+c+d}{2} \leq \sqrt[3]{(abcd+1)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)}$$

Lời giải. Sử dụng kết quả bài toán **65**, ta có

$$9(a+b+c+d) \leq 4abcd + 32$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM–GM thì

$$abcd \le 1, \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \ge \frac{4}{\sqrt[4]{abcd}}$$

Như vậy, ta cần chứng minh

$$2(x^4+8) \le 9\sqrt[3]{\frac{4(x^4+1)}{x}}$$

với $x = \sqrt[4]{abcd} \le 1$.
Hay

$$f(x) = \frac{x(x^4+8)^3}{x^4+1} \le \frac{729}{2}$$

Ta có $f'(x) = \frac{(x^4+8)^2(9x^8-11x^4+8)}{(x^4+1)^2} > 0$, suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến, do đó $f(x) \le f(1) = \frac{729}{2}$.
Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

♡♡♡

70 *Cho các số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa $a_1a_2\cdots a_n = 1$. Khi đó, với mọi $k \in \mathbb{R}$, ta có*

$$\frac{1}{(1+a_1)^k}+\frac{1}{(1+a_2)^k}+\cdots+\frac{1}{(1+a_n)^k} \ge \min\left\{1, \frac{n}{2^k}\right\}$$

Lời giải. Nhận xét rằng ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp $k > 0$ là đủ. Đặt $f(t) = \frac{1}{(t+1)^k}$. Gọi M là trung bình nhân của $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n) \ge \min\{nf(M), 1\}$$

Ta có Bổ đề sau
Bổ đề. Nếu $0 < a \le b \le c \le d$ và $ad = bc$ thì

$$f(a)+f(d) \ge \min\{f(b)+f(c), 1\}$$

Thật vậy, đặt $m = \sqrt{ad} = \sqrt{bc}$ va $g(t) = f(mt) + f\left(\frac{m}{t}\right) = (mt+1)^{-k} + \left(\frac{m}{t}+1\right)^{-k}$ với mọi $t > 0$. Lại đặt $t_1 = \frac{c}{m}, t_2 = \frac{d}{m}$ thì $t_2 \ge t_1 \ge 1$. Ta cần chứng minh

$$g(t_2) \ge \min\{g(t_1), 1\}$$

Xét tính đơn điệu của g trên $[1, +\infty)$, ta có

$$g'(t) = mk\left(\frac{1}{t^2}\left(\frac{m}{t}+1\right)^{-k-1} - (mt+1)^{-k-1}\right)$$

$$g'(t) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{t^2}\left(\frac{m}{t}+1\right)^{-k-1} > (mt+1)^{-k-1}$$

$$h(t) = t^{\frac{2}{k+1}} - mt + mt^{\frac{1-k}{1+k}} - 1 < 0$$

Lại có

$$h'(t) = \frac{2}{k+1}t^{\frac{1-k}{1+k}} - m + \frac{1-k}{1+k}mt^{-\frac{2k}{k+1}}$$

$$h''(t) = \frac{2(1-k)}{(k+1)^2}t^{-\frac{3k+1}{k+1}}(t-mk)$$

$$h(1) = 0, \qquad h'(1) = \frac{2(1-km)}{k+1}$$

Tùy thuộc vào các giá trị của m và k, xét các trường hợp sau

(i) $k = 1, m \le 1$, ta có $h(t) = (1-m)(t-1) \ge 0\ \forall t > 1$, do đó $h \ge 0$ trên $(1, +\infty)$.

(ii) $k = 1, m > 1$, ta có $h(t) = (1-m)(t-1) < 0\ \forall t > 1$, do đó $h < 0$ trên $(1, +\infty)$.

(iii) $k < 1, m \le \frac{1}{k}$, khi đó, ta có $h'' > 0\ \forall t > 1$, vì $h'(1) \ge 0$ nên $h' > 0$ trên $(1, +\infty)$. Vì $h(1) = 0$ và h liên tục nên $h > 0$ trên $(1, +\infty)$.

(iv) $k < 1, m > \frac{1}{k}$, khi đó, ta có $h'(1) < 0$ và $h'' < 0\ \forall t \in (1, mk)$, suy ra $h' < 0\ \forall t \in (1, mk)$. Vì $h(1) = 0$ và h liên tục nên $h < 0\ \forall t \in (1, mk]$. Trên $(mk, +\infty)$, ta có $h'' > 0$, tức h là hàm lõm trên $(mk, +\infty)$. Ta lại có $h(mk) < 0$ và $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$ nên tồn tại duy nhất $p > 1$ sao cho $h < 0\ \forall t \in (1, p)$ và $h > 0\ \forall t \in (p, +\infty)$.

(v) $k > 1, m \le \frac{1}{k}$, khi đó, ta có $h'' < 0\ \forall t > 1$, tức h là hàm lồi trên $(1, +\infty)$. Do h là hàm liên tục nên $h(t) \ge \min\left\{h(1), \lim\limits_{t\to+\infty} h(t)\right\} = 0\ \forall t > 1$.

(vi) $k > 1, m > \frac{1}{k}$, khi đó, ta có $h'' > 0\ \forall t \in (1, mk)$, tức h là hàm lõm trên $(1, mk)$ và $h'' < 0\ \forall t \in (mk, +\infty)$, tức h là hàm lồi trên $(mk, +\infty)$. Nếu $h(mk) < 0$ thì do $h(1) = 0$ và h liên tục nên $h \le 0\ \forall t \in (1, mk]$, lại do $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$ nên tồn tại duy nhất $u > mk$ sao cho $h < 0\ \forall t \in (mk, u)$ và $h \ge 0\ \forall t \in (u, +\infty)$. Nếu $h(mk) \ge 0$ thì do h là hàm lồi trên $(mk, +\infty)$ nên $h(t) \ge \min\left\{h(mk), \lim\limits_{t\to+\infty} h(t)\right\} \ge 0\ \forall t > mk$, do h là hàm lõm trên $(1, mk)$ và $h(1) = 0$ nên tồn tại $v \in [1, mk]$ sao cho $h \le 0\ \forall t \in (1, v]$ và $h \ge 0\ \forall t \in [v, mk]$.

Từ các trường hợp nói trên

+, Nếu $h(t_2) \ge 0$ thì $h \ge 0\ \forall t \in (t_2, +\infty)$, tức là $g' \le 0$. Suy ra, g là hàm không tăng trên $[t_2, +\infty)$. Do đó

$$g(t_2) \ge \lim_{t\to+\infty} g(t) = 1$$

+, Nếu $h(t_2) < 0$ thì $h \le 0\ \forall t \in (1, t_2)$, tức là $g' \ge 0$. Suy ra, g là hàm không giảm trên $(1, t_2)$. Do đó

$$g(t_2) \ge g(t_1)$$

Vậy, ta có

$$g(t_2) \ge \min\{g(t_1), 1\}$$

Bổ đề được chứng minh hoàn toàn.

Trở lại bài toán của ta, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n. Trường hợp $n = 1, n = 2$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Giả sử bất đẳng thức đúng cho số biến bé hơn n $(n \ge 3)$. Ta sẽ chứng minh minh nó cũng đúng cho số biến bằng n. Ta cần chứng minh

$$f(a_{1)} + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \ge \min\{nf(M), 1\}$$

Dễ thấy rằng trong dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ luôn tồn tại ít nhất một số không lớn hơn M và ít nhất một số không nhỏ hơn M. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a_1 \le M \le a_2$. Ký hiệu $x_1 = \min\left\{M, \frac{a_1a_2}{M}\right\}$ và $x_2 = \max\left\{M, \frac{a_1a_2}{M}\right\}$. Khi đó, ta có $a_1 \le x_1 \le x_2 \le a_2$ và $x_1x_2 = a_1a_2$, do đó sử dụng Bổ đề trên, ta có

$$f(a_1) + f(a_2) \ge \min\{f(x_1) + f(x_2), 1\} = \min\left\{f(M) + f\left(\frac{a_1a_2}{M}\right), 1\right\}$$

Chú ý rằng $\frac{a_1a_2}{M}, a_3, a_4, \ldots, a_n$ cũng có trung bình nhân là M và số biến là $n-1 < n$ nên theo giả thiết quy nạp, ta có

$$f\left(\frac{a_1a_2}{M}\right) + f(a_3) + \ldots + f(a_n) \ge \min\{(n-1)f(M), 1\}$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geq \min\left\{f(M) + f\left(\frac{a_1a_2}{M}\right), 1\right\} + f(a_3) + \cdots + f(a_n)$$
$$\geq \min\left\{f(M) + f\left(\frac{a_1a_2}{M}\right) + f(a_3) + \cdots + f(a_n), 1\right\} \geq \min\{nf(M), 1\}$$

Vậy bất đẳng thức trên cũng đúng cho số biến bằng n. Theo nguyên lý quy nạp, ta suy ra nó đúng với mọi n. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

♡♡♡

71 *Cho a, b, c là các số dương, chứng minh rằng*

1. $\dfrac{a^9}{bc} + \dfrac{b^9}{ca} + \dfrac{c^9}{ab} + \dfrac{2}{abc} \geq a^5 + b^5 + c^5 + 2$

2. $\dfrac{a^9}{bc} + \dfrac{b^9}{ca} + \dfrac{c^9}{ab} + \dfrac{3}{abc} \geq a^4 + b^4 + c^4 + 3$

Lời giải. (1) Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\frac{a^9}{bc} + abc \geq 2a^5, \qquad \frac{b^9}{ca} + abc \geq 2b^5, \qquad \frac{c^9}{ab} + abc \geq 2c^5$$

Suy ra

$$\frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ca} + \frac{c^9}{ab} \geq 2(a^5 + b^5 + c^5) - 3abc \geq a^5 + b^5 + c^5 + 3\sqrt[3]{a^5b^5c^5} - 3abc$$

Do đó để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh

$$3\sqrt[3]{a^5b^5c^5} - 3abc + \frac{2}{abc} \geq 2$$

Hay

$$3t^5 - 3t^3 + \frac{2}{t^3} \geq 2$$

với $t = \sqrt[3]{abc} > 0$.

$$\frac{(t-1)^2(3t^6 + 6t^5 + 6t^4 + 6t^3 + 6t^2 + 4t + 2)}{t^3} \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

(2) Tương tự như trên, áp dụng bất đẳng thức AM–GM, ta cũng có

$$\frac{a^9}{bc} + abc + a^2 \geq 3a^4, \qquad \frac{b^9}{ca} + abc + b^2 \geq 3b^4, \qquad \frac{c^9}{ab} + abc + c^2 \geq 3c^4$$

Suy ra

$$\frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ca} + \frac{c^9}{ab} \geq 3(a^4 + b^4 + c^4) - (a^2 + b^2 + c^2) - 3abc$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\frac{1}{2}(a^4 + 1) \geq a^2, \qquad \frac{1}{2}(b^4 + 1) \geq b^2, \qquad \frac{1}{2}(c^4 + 1) \geq c^2$$

Suy ra

$$\frac{1}{2}(a^4 + b^4 + c^4) \geq a^2 + b^2 + c^2 - \frac{3}{2}$$

Do đó từ trên, ta được

$$\frac{a^9}{bc}+\frac{b^9}{ca}+\frac{c^9}{ab}\ge\frac{5}{2}(a^4+b^4+c^4)-3abc-\frac{3}{2}\ge\frac{9}{2}\sqrt[3]{a^4b^4c^4}+(a^4+b^4+c^4)-3abc-\frac{3}{2}$$

Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{9}{2}\sqrt[3]{a^4b^4c^4}-3abc-\frac{3}{2}+\frac{3}{abc}\ge 3$$

Hay

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}t^4-3t^3+\frac{3}{t^3}\ge\frac{9}{2}$$

với $t=\sqrt[3]{abc}>0$.

$$\frac{3}{2}(t-1)^2(t+1)(3t^4+t^3+4t^2+2t+2)\ge 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

♡♡♡

72 *Cho x,y,z,t là các số dương thỏa $xyzt=1$, chứng minh rằng*

$$\frac{1}{xy+yz+zx+1}+\frac{1}{yz+zt+ty+1}+\frac{1}{zt+tx+xz+1}+\frac{1}{tx+xy+yt+1}\le 1$$

Lời giải. Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z},d=\frac{1}{t}$, thì ta có $a,b,c,d>0$ và $abcd=1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{a(b+c+d)+1}+\frac{1}{b(c+d+a)+1}+\frac{1}{c(d+a+b)+1}+\frac{1}{d(a+b+c)+1}\le 1$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a\ge b\ge c\ge d>0$, thì $cd\le 1$. Khi đó, theo bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\frac{1}{c(d+a+b)+1}+\frac{1}{d(a+b+c)+1}\le\frac{1}{c\left(d+2\sqrt{ab}\right)+1}+\frac{1}{d\left(2\sqrt{ab}+c\right)+1}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\frac{1}{a(b+c+d)+1}+\frac{1}{b(c+d+a)+1}&=\frac{(a+b)(c+d)+2(ab+1)}{(a+b)(c+d)(ab+1)+ab(c+d)^2+(ab+1)^2}\\&=\frac{m+2(ab+1)}{m(ab+1)+ab(c+d)^2+(ab+1)^2}=f(m)\end{aligned}$$

trong đó $m=(a+b)(c+d)\ge 2\sqrt{ab}(c+d)>0$. Ta có

$$f'(m)=\frac{ab(c^2+d^2+cd-ab-2)}{(m(ab+1)+ab(c+d)^2+(ab+1)^2)^2}\le 0$$

Do đó $f(m)$ là hàm nghịch biến, suy ra

$$f(m)\le f\left(2\sqrt{ab}(c+d)\right)=\frac{2}{\sqrt{ab}\left(c+d+\sqrt{ab}\right)+1}$$

Đặt $A=\sqrt{ab}$, thì ta có $A\ge 1$ và $A^2cd=1$. Do đó

$$VT\le\frac{2}{A\,(c+d+A)+1}+\frac{1}{c\,(d+2A)+1}+\frac{1}{d\,(2A+c)+1}$$

Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{2}{A(c+d+A)+1}+\frac{1}{c(d+2A)+1}+\frac{1}{d(2A+c)+1}\le 1$$

Đặt $p = A(c+d)$, khi đó sau một vài tính toán đơn giản (với chú ý rằng $A^2cd = 1$), ta có bất đẳng thức trên tương đương với

$$2cdp^2 + (cd-1)^2p + 3A^2 - c^2d^2 - 3cd - 7 \ge 0$$

Hay

$$2A^2cd(c+d)^2 + A(c+d)(cd-1)^2 + 3A^2 - c^2d^2 - 3cd - 7 \ge 0$$
$$2(c+d)^2 + A(c+d)(cd-1)^2 + 3A^2 - c^2d^2 - 3cd - 7 \ge 0$$
$$2(c-d)^2 + A(c+d)(cd-1)^2 + 3A^2 - c^2d^2 + 5cd - 7 \ge 0$$
$$2(c-d)^2 + A(c+d)(cd-1)^2 + \frac{3}{cd} - c^2d^2 + 5cd - 7 \ge 0$$
$$2(c-d)^2 + A(c+d)(cd-1)^2 + \frac{(cd-1)^2(3-cd)}{cd} \ge 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì $cd \le 1$. Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

♡♡♡

73 *Chứng minh rằng với mọi $x, y, z, t > 0$ thì*

$$(x+y)(x+z)(x+t)(y+z)(y+t)(z+t) \ge 4xyzt(x+y+z+t)^2$$

Lời giải. Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}, d = \frac{1}{t}$ thì ta có $a, b, c, d > 0$. Khi đó, bất đẳng thức trên trở thành

$$(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d) \ge 4(abc+abd+acd+bcd)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}(abc+abd+acd+bcd)^2 &= \left(\sqrt{ac}\cdot b\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\cdot a\sqrt{bd}+\sqrt{ad}\cdot c\sqrt{ad}+\sqrt{bc}\cdot d\sqrt{bc}\right)^2\\ &\le (ac+bd+ad+bc)(ab^2c+a^2bd+ac^2d+bcd^2)\\ &= (a+b)(c+d)(ab^2c+a^2bd+ac^2d+bcd^2)\\ (abc+abd+acd+bcd)^2 &= \left(\sqrt{bc}\cdot a\sqrt{bc}+\sqrt{ad}\cdot b\sqrt{ad}+\sqrt{ac}\cdot d\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\cdot c\sqrt{bd}\right)^2\\ &\le (bc+ad+ac+bd)(a^2bc+ab^2d+acd^2+bc^2d)\\ &= (a+b)(c+d)(a^2bc+ab^2d+acd^2+bc^2d)\end{aligned}$$

Cộng 2 bất đẳng thức trên vế với vế, ta được

$$2(abc+abd+acd+bcd)^2 \le (a+b)^2(c+d)^2(ab+cd)$$

Tương tự, ta có

$$2(abc+abd+acd+bcd)^2 \le (a+c)^2(b+d)^2(ac+bd)$$
$$2(abc+abd+acd+bcd)^2 \le (a+d)^2(b+c)^2(ad+bc)$$

Do đó

$$8(abc+abd+acd+bcd)^6 \le (a+b)^2(a+c)^2(a+d)^2(b+c)^2(b+d)^2(c+d)^2(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d) \ge 8(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$4(ab+cd)(ac+bd) \le (ab+cd+ac+bd)^2 = (a+d)^2(b+c)^2$$

Tương tự

$$4(ac+bd)(ad+bc) \le (a+b)^2(c+d)^2, \qquad 4(ab+cd)(ad+bc) \le (a+c)^2(b+d)^2$$

Suy ra

$$4^3(ab+cd)^2(ac+bd)^2(ad+bc)^2 \le (a+b)^2(a+c)^2(a+d)^2(b+c)^2(b+d)^2(c+d)^2$$

Hay

$$(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d) \ge 8(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=t$.

♡♡♡

74 *Chứng minh rằng với mọi số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa $a_1a_2\cdots a_n = 1$ ta có bất đẳng thức*

$$\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\cdots+\sqrt{a_n^2+1} \le \sqrt{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}x + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln x$ với $x > 0$. Ta có

$$f'(x) = \frac{(x-1)\left(-2x^2+x-1-2x^2\sqrt{2(x^2+1)}\right)}{x\sqrt{2(x^2+1)}\left(\sqrt{2}x^2+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Qua 1 thì $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên

$$f(x) \le f(1) = 0 \qquad \forall x > 0$$

Hay

$$\sqrt{x^2+1} \le \sqrt{2}x - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln x \qquad \forall x > 0$$

Sử dụng bất đẳng thức này cho n số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rồi cộng lại, ta được

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2+1} &\le \sqrt{2}\sum_{i=1}^n a_i - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sum_{i=1}^n \ln a_i\right)\\ &= \sqrt{2}\sum_{i=1}^n a_i - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln(a_1a_2\cdots a_n) = \sqrt{2}\sum_{i=1}^n a_i\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

♡♡♡

75 *Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3} \le \sqrt[3]{a\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3}}$$

Lời giải. Đặt $a = x^6, b = y^6, c = z^6$ $(x, y, z > 0)$. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(x^4 + xy^3 + y^2z^2)^3 \le \frac{9}{2}(x^6 + y^6)(x^6 + y^6 + z^6)$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$(x^4 + xy^3 + y^2z^2)^3 = (x^2 \cdot x^2 \cdot 1 + xy \cdot y^2 \cdot 1 + y^2 \cdot z^2 \cdot 1)^3 \le 3(x^6 + x^3y^3 + y^6)(x^6 + y^6 + z^6)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM–GM thì

$$x^3y^3 \le \frac{x^6 + y^6}{2}$$

Suy ra

$$\left(x^4 + xy^3 + y^2z^2\right)^3 \le 3(x^6 + x^3y^3 + y^6)(x^6 + y^6 + z^6) \le \frac{9}{2}(x^6 + y^6)(x^6 + y^6 + z^6)$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

♡♡♡

76 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} + \frac{b^3}{\sqrt{c^2 - ca + a^2}} + \frac{c^3}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} \ge a^2 + b^2 + c^2$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} \ge \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\sum_{cyc} a\sqrt{b^2 - bc + c^2}}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} a\sqrt{b^2 - bc + c^2} \le a^2 + b^2 + c^2$$

Lại sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta được

$$\left(\sum_{cyc} a\sqrt{b^2 - bc + c^2}\right)^2 \le \left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} a(b^2 - bc + c^2)\right)$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \ge \left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} a(b^2 - bc + c^2)\right)$$

Hay

$$\sum_{cyc} a^4 + abc\sum_{cyc} a \ge \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2)$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur. Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) \sim (1, 1, 1)$, hoặc $(a, b, c) \sim (1, 1, 0)$.

♡♡♡

77 *Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm*

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+6ab+2b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+6bc+2c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+6ca+2a^2}}\ge 1$$

Lời giải. Đặt $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{a}{c}$ thì ta có $x, y, z \ge 0$ và $xyz=1$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{\sqrt{2x^2+6x+1}}\ge 1$$

Do $x, y, z \ge 0, xyz=1$ nên tồn tại các số $m, n, p \ge 0$ sao cho $x=\frac{np}{m^2}, y=\frac{pm}{n^2}, z=\frac{mn}{p^2}$, bất đẳng thức được viết lại như sau

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{m^2}{\sqrt{m^4+6m^2np+2n^2p^2}}\ge 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$VT^2\left(\sum_{\text{cyc}}m^2(m^4+6m^2np+n^2p^2)\right)\ge (m^2+n^2+p^2)^3$$

Ta phải chứng minh

$$(m^2+n^2+p^2)^3\ge \sum_{\text{cyc}}m^2(m^4+6m^2np+2n^2p^2)$$

Hay

$$3\sum_{\text{cyc}}m^4(n-p)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc các số a, b, c thỏa $\frac{b}{a}\to 0, \frac{c}{b}\to 0$ và các hoán vị.

♡♡♡

78 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}+3\sqrt{\frac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}}\ge\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$, ta sẽ chứng minh

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge\sqrt{\frac{b+c}{a}}$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương

$$\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+2\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}\ge\frac{b+c}{a}$$

Hay

$$2\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}\ge\frac{bc}{a(a+c)}+\frac{bc}{a(a+b)}$$

$$\frac{2a}{\sqrt{bc}}\ge\frac{2a+b+c}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$$

$$\frac{2\left(a-\sqrt{bc}\right)}{\sqrt{bc}} \geq \frac{(b-c)^2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}\right)^2}$$

Ta có

$$VT - VP \geq \frac{2\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\sqrt{c}} - \frac{(b-c)^2}{4(a+b)(a+c)} = \left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{c}} - \frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{4(a+b)(a+c)}\right) \geq 0$$

Vì

$$\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 \leq 2(b+c) \leq 2(a+c), \qquad \sqrt{c}\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right) \leq \sqrt{bc} \leq a$$

Mặt khác, dễ thấy

$$ab+bc+ca \geq a(b+c), \qquad a^2+b^2+c^2 \leq a^2+(b+c)^2$$

Suy ra

$$VT \geq \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + 3\sqrt{\frac{3a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}} = x + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-2}}$$

với $x = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} \geq 2.$

Ta cần chứng minh

$$x + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-2}} \geq \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Nếu $x \geq \frac{7\sqrt{2}}{2}$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng, xét trường hợp ngược lại $x \leq \frac{7\sqrt{2}}{2}$, khi đó ta có

$$\frac{27}{x^2-2} - \left(\frac{7\sqrt{2}}{2} - x\right)^2 = \frac{\left(x-2\sqrt{2}\right)^2\left(19+6\sqrt{2}x-2x^2\right)}{2(x^2-2)} \geq 0 \text{ (do } x \leq \frac{7\sqrt{2}}{2})$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) \sim \left(3+2\sqrt{2},1,0\right)$.

Nhận xét. Một cách tổng quát, ta có kết quả sau

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + k\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \min_{x\geq 2}\left\{x + \frac{k}{\sqrt{x^2-2}}\right\} \qquad \forall a,b,c,k \geq 0$$

Tuy nhiên, bằng tính toán thực tế, ta nhận thấy với $k = 3\sqrt{3}$ thì bài toán có đáp số đẹp nhất.

♡♡♡

79 *Cho các số không âm a,b,c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{16(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 8$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$, đặt $ab+bc+ca=x$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{3abc+1-2x}{x-abc} + \frac{16x}{1-2x} \geq 8$$

Ta có

$$VT \geq \frac{1-2x}{x} + \frac{16x}{1-2x} = \frac{(6x-1)^2}{x(1-2x)} + 8 \geq 8$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) \sim \left(2+\sqrt{3},1,0\right)$.

♡♡♡

80 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$3(a^3+b^3+c^3)+2abc \geq 11\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{3/2}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$, đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$ thì ta có $\frac{1}{3} \geq q \geq 0$, ngoài ra, sử dụng bất đẳng thức Schur, ta cũng có $r \geq \max\left\{0, \frac{4q-1}{9}\right\}$, bất đẳng thức trở thành

$$11r+3-9q \geq 11\left(\frac{1-2q}{3}\right)^{3/2}$$

Nếu $1 \geq 4q$, ta có

$$VT-VP \geq 3-9q-11\left(\frac{1-2q}{3}\right)^{3/2} > 0 \text{ (do } \frac{1}{4} \geq q \geq 0)$$

Nếu $4q \geq 1$, ta có

$$VT-VP \geq \frac{16-37q}{9}-11\left(\frac{1-2q}{3}\right)^{3/2} = \frac{(1-3q)(673q-107-968q^2)}{9\left(16-37q+11\sqrt{3(1-2q)^3}\right)} \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

81 *Cho các số không âm a, b, c, d thỏa $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a^3}{1-bcd}+\frac{b^3}{1-cda}+\frac{c^3}{1-dab}+\frac{d^3}{1-abc} \geq \frac{4}{7}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta suy ra được ta chỉ cần chứng minh

$$7(a^3+b^3+c^3+d^3)^2+4abcd-4(a^3+b^3+c^3+d^3) \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $d=\min\{a,b,c\}$ suy ra $d \leq \frac{1}{2}$, đặt $t=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, ta sẽ chứng minh

$$VT \geq 7(3t^3+d^3)^2+4t^3d-4(3t^3+d^3)$$

Hay

$$7(a^3+b^3+c^3-3t^3)(a^3+b^3+c^3+2d^3+3t^3) \geq 4(a^3+b^3+c^3-3t^3)+4d(t^3-abc)$$

Từ kết quả bài toán trên, ta dễ dàng suy ra được $0 \leq 2(t^3-abc) \leq 3(a^3+b^3+c^3-3t^3)$, ta cần chứng minh

$$7(a^3+b^3+c^3-3t^3)(a^3+b^3+c^3+2d^3+3t^3) \geq 4(a^3+b^3+c^3-3t^3)+6d(a^3+b^3+c^3-3t^3)$$

Hay

$$7(a^3+b^3+c^3+2d^3+3t^3) \geq 4+6d$$

Theo bất đẳng thức Hölder, ta có

$$a^3+b^3+c^3+d^3 \geq \frac{1}{2}, \qquad 3t^3+d^3 \geq \frac{1}{2}$$

Suy ra

$$7(a^3+b^3+c^3+2d^3+3t^3)-4-6d \geq 3(1-2d) \geq 0$$

Tiếp theo, ta phải chứng minh

$$7(3t^3+d^3)^2+4t^3d-4(3t^3+d^3)\ge 0$$

Hay

$$\frac{7(3t^3+d^3)^2+4t^3d(3t^2+d^2)}{(3t^3+d^3)(3t^2+d^2)^{3/2}}\ge 4$$

$$f(x)=\frac{7(x^3+3)^2+4x(x^2+3)}{(x^3+3)(x^2+3)^{3/2}}\ge 4$$

với $x=\frac{d}{t}\le 1$.

Ta có thể dễ dàng chứng minh bất đẳng thức trên. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\frac{1}{2}$.

♡♡♡

82 *Cho các số không âm a,b,c,d thỏa $a^3+b^3+c^3+d^3=1$, chứng minh bất đẳng thức*

$$1\le \frac{a^3}{1-bcd}+\frac{b^3}{1-cda}+\frac{c^3}{1-dab}+\frac{d^3}{1-abc}\le \frac{4}{3}$$

Lời giải. Ta có

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3}{1-bcd}\ge \sum_{\text{cyc}}a^3=1$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM–GM,

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{3a^3}{3-3bcd}\le \sum_{\text{cyc}}\frac{3a^3}{3-(b^3+c^3+d^3)}=3\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3}{a^3+2}=12-6\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a^3+2}$$

$$\le 12-\frac{96}{a^3+b^3+c^3+d^3+8}=\frac{4}{3}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

♡♡♡

83 *Cho các số dương a,b,c,d thỏa $a+b+c+d=4$, chứng minh rằng*

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{da}\ge a^2+b^2+c^2+d^2$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta suy ra được với mọi $x,y>0$ thì

$$x^2+y^2\le \frac{(x+y)^4}{8xy}$$

Sử dụng bất đẳng thức này, ta có

$$a^2+c^2\le \frac{(a+c)^4}{8ac}=\frac{(a+c)^4bd}{8abcd}\le \frac{(a+c)^4(b+d)^2}{32abcd}$$

Tương tự, ta có

$$b^2+d^2\le \frac{(b+d)^4(a+c)^2}{32abcd}$$

Ta cần chứng minh

$$32(a+c)(b+d)\ge (a+c)^2(b+d)^2((a+c)^2+(b+d)^2)$$

Hay

$$32\ge (a+c)(b+d)((a+c)^2+(b+d)^2)$$

$$((a+c)+(b+d))^4\ge 8(a+c)(b+d)((a+c)^2+(b+d)^2)\ (\text{đúng})$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

♡♡♡

84 *Cho các số dương x, y, z, tìm hằng số k lớn nhất sao cho*

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+3k \geq (k+1)\cdot\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $xyz=1$, khi đó tồn tại $a,b,c>0$ sao cho $x=\frac{a}{b}, y=\frac{c}{a}, z=\frac{b}{c}$, bất đẳng thức trở thành

$$a^3+b^3+c^3+3kabc \geq (k+1)(ab^2+bc^2+ca^2)$$

Cho $a=1, b=\sqrt[3]{2}, c\to 0$, ta suy ra được $k \leq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}-1$, ta sẽ chứng minh đây là giá trị cần tìm. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $c=\min\{a,b,c\}$, đặt $a=c+x, b=c+y$ $(x,y\geq 0)$, bằng tính toán đơn giản, ta có bất đẳng thức tương đương với

$$3\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)(x^2-xy+y^2)c+x^3+y^3-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}xy^2 \geq 0$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$x^3+y^3=x^3+\frac{y^3}{2}+\frac{y^3}{2}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{4}}xy^2$$

Vậy ta có đpcm, do đó giá trị k phải tìm là

$$k_{\max}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}-1.$$

♡♡♡

85 *Cho các số không âm a,b,c,d, chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+c+d}}+\sqrt{\frac{c}{c+d+a}}+\sqrt{\frac{d}{d+a+b}}\leq\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}\right)^2 \leq \left(\sum_{cyc}(a+b+d)(a+c+d)\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b+c)(a+b+d)(a+c+d)}\right)$$
$$=\frac{2(2(a+b+c+d)^2+(a+c)(b+d))((a+c)(b+d)+ac+bd)}{(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)}$$

Ta cần chứng minh

$$8(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)\geq 3(2(a+b+c+d)^2+(a+c)(b+d))((a+c)(b+d)+ac+bd)$$

Đặt $P(a,b,c,d)=VT-VP=f(x)$ với $x=bd$, rõ ràng đây là 1 hàm bậc nhất theo x, nên ta phải có

$$f(x)\geq\min\left\{f(0), f\left(\frac{(b+d)^2}{4}\right)\right\}$$

Do đó $P(a,b,c,d)\geq\min\left\{P(a,b+d,c,0), P\left(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2}\right)\right\}$, tương tự, ta có

$$P(a,b+d,c,0)\geq\min\left\{P(a+c,b+d,0,0), P\left(\frac{a+c}{2},b+d,\frac{a+c}{2},0\right)\right\}$$

$$P\left(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2}\right)\geq\min\left\{P\left(a+c,\frac{b+d}{2},0,\frac{b+d}{2}\right), P\left(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2},\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\right)\right\}$$

Như vậy, ta chỉ cần xét bài toán trong các trường hợp sau là đủ

+, $c = d = 0$, bất đẳng thức trở thành

$$8ab(a+b)^2 \geq 3ab(2a^2 + 5ab + 2b^2)$$

Hay

$$ab(2a^2 + ab + 2b^2) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

+, $a = c, d = 0$, bất đẳng thức trở thành

$$16a(2a+b)(a+b)^2 \geq 6a(a+2b)(a+b)(4a+b)$$

Hay

$$2a(a+b)(4a^2 - 3ab + 2b^2) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

+, $a = c, b = d$, bất đẳng thức trở thành

$$8(2a+b)^2(a+2b)^2 \geq 12(2a^2 + 5ab + 2b^2)(a^2 + 4ab + b^2)$$

Hay

$$4(2a+b)(a+2b)(a-b)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

Nhận xét. Với cách làm tương tự, ta có thể giải được bài toán sau của Vasile Cirtoaje trên MR 1/2007

$$\sqrt{2}(4 - ab - bc - c - d - da) \geq \left(\sqrt{2} + 1\right)(4 - a - b - c - d)$$

với mọi số thực không âm a, b, c, d thỏa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$.

♡♡♡

86 *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c, d \in [1, 2]$, ta có*

$$\frac{a+b}{c+d} + \frac{c+d}{a+b} - \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải. Đặt $VT = f(a, c)$, ta có

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = \frac{2(c+d)}{(a+b)^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = \frac{2(a+b)}{(c+d)^2} > 0$$

Do đó, f là hàm lồi với a, c. Xét các trường hợp sau

Trường hợp 1. $b \geq d$, khi đó do $a, b, c, d \in [1, 2]$ nên $2d \geq a, b, c, d \geq \frac{1}{2}b$, do f là hàm lồi với a, c nên

$$f(a, c) \leq \max\left\{ f(2d, 2d), f\left(2d, \frac{b}{2}\right), f\left(\frac{b}{2}, 2d\right), f\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right) \right\}$$

Ta lại có

$$f(2d, 2d) = \frac{(2b+d)(b^2 - 4d^2) - 9d^2(b+4d)}{6d(b+d)(b+2d)} + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$f\left(2d, \frac{b}{2}\right) = \frac{b - 2d}{2(b+d)} + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{b}{2}, 2d\right) = \frac{b^2(b-2d) + d(d-b)(b+4d))}{2bd} + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{(b-d)(b-2d)(5b+4d)}{6b(b+d)(b+2d)} + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$$

Trường hợp 2. $d \geq b$, khi đó, do $a,b,c,d \in [1,2]$ nên $2b \geq a,b,c,d \geq \frac{1}{2}d$, do f là hàm lồi với a,c nên

$$f(a,c) \leq \max\left\{f(2b,2b), f\left(2b,\frac{d}{2}\right), f\left(\frac{d}{2},2b\right), f\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)\right\}$$

Ta lại có

$$f(2b,2b) = \frac{(b+2d)(d^2-4b^2)-9b^2(4b+d)}{6b(b+d)(2b+d)} + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$f\left(2b,\frac{d}{2}\right) = \frac{d^2(d-2b)+b(b-d)(4b+d)}{2bd(b+d)} + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{d}{2},2b\right) = \frac{d-2b}{2(b+d)} + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right) = \frac{(d-b)(d-2b)(5d+4b)}{6d(b+d)(2b+d)} + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

♡♡♡

87 *Chứng minh rằng với mọi $a,b,c>0$, ta luôn có*

$$\frac{a^2b}{c(b+c)} + \frac{b^2c}{a(c+a)} + \frac{c^2a}{b(a+b)} \geq \frac{3}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

Lời giải. Đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, c=\frac{1}{c}$ thế thì bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2}{y^2(z+x)} \geq \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{xyz(xy+yz+zx)}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2(x+y+z)}{y^2(z+x)} \geq \frac{3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)(x+y+z)}{2xyz(xy+yz+zx)}$$

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2}{y^2} + \sum_{\text{cyc}} \frac{x^2}{y(z+x)} \geq \frac{3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)(x+y+z)}{2xyz(xy+yz+zx)}$$

Sử dụng kết quả bài toán **17** và bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2}{y^2} \geq \frac{3}{2}\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2+y^2}{xy} - 6, \qquad \sum_{\text{cyc}} \frac{x^2}{y(z+x)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{3}{2}\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2+y^2}{xy} - 6 + \frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)} \geq \frac{3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)(x+y+z)}{2xyz(xy+yz+zx)}$$

Chuẩn hóa cho $x+y+z=1$ và đặt $u=xy+yz+zx, v=xyz$ thì ta có $\frac{1}{3} \geq q \geq 0, r \geq 0$ và bất đẳng thức trở thành

$$\frac{3(u-3v)}{2v} + \frac{1}{2u} - 6 \geq \frac{3(u^2-2v)}{2uv}$$

Ta có

$$VT - VP = \frac{7(1-3u)}{2u} \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

88 *Cho các số không âm a, b, c, thỏa $a^2+b^2+c^2=3$, chứng minh rằng*

$$1+4abc \geq 5\min\{a,b,c\}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\min\{a,b,c\}$, suy ra $1 \geq a \geq 0$, bất đẳng thức trở thành

$$1+4abc \geq 5a$$

Do $a=\min\{a,b,c\}$ nên ta có $bc \geq a\sqrt{b^2+c^2-a^2}=a\sqrt{3-2a^2}$, ta phải chứng minh

$$4a^2\sqrt{3-2a^2} \geq 5a-1$$

Nếu $a \leq \frac{1}{2}$, ta có $VT-VP \geq 2\sqrt{10}a^2-5a+1 \geq 0$, nếu $a \geq \frac{1}{2}$, bất đẳng thức tương đương với

$$16a^2(3-2a^2) \geq (5a-1)^2$$

Hay

$$(a-1)(32a^5+32a^4-16a^3-16a^2+9a-1) \leq 0$$
$$32a^5+32a^4-16a^3-16a^2+9a-1 \geq 0$$

Ta có

$$32a^5+32a^4-16a^3-16a^2+9a-1=\frac{1}{2}(2a-1)(32a^3+3)+2a(2a-1)^2(4a^2+4a+3)+\frac{1}{2}>0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

♡♡♡

89 *Với mọi $a, b, c \geq 0$ và $ab+bc+ca=1$, ta có*

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2+3bc}}+\frac{1}{\sqrt{2b^2+3ca}}+\frac{1}{\sqrt{2c^2+3ab}} \geq \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Lời giải. Đặt $x=bc, y=ca, z=ab$, suy ra $x+y+z=1$, bất đẳng thức trở thành

$$\sqrt{\frac{x}{3x^2+2yz}}+\sqrt{\frac{y}{3y^2+2zx}}+\sqrt{\frac{z}{3z^2+2xy}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3(x+y+z)}}$$

Ta có

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{x}{3x^2+2yz} \geq \frac{4}{3(x+y+z)} \tag{2.2}$$

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{xy}{(3x^2+2yz)(3y^2+2zx)} \geq \frac{4}{9(x+y+z)^2} \tag{2.3}$$

vì

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{x}{3x^2+2yz}-\frac{4}{3(x+y+z)}=\frac{18A+21B+7C}{3(x+y+z)(3x^2+2yz)(3y^2+2zx)(3z^2+2xy)} \geq 0$$

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{xy}{(3x^2+2yz)(3y^2+2zx)}-\frac{4}{9(x+y+z)^2}=\frac{18A+36B+22C+15xyz(x+y+z)^3}{9(x+y+z)^2(3x^2+2yz)(3y^2+2zx)(3z^2+2xy)} \geq 0$$

với $A=(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2, B=xyz(x+y)(y+z)(z+x), C=(xyz)^2$. Tiếp theo, với mọi $m, n, p \geq 0$,

$$\begin{aligned}
m+p+n &= \sqrt{m^2+n^2+p^2+2(mn+np+pm)}\\
&= \sqrt{m^2+n^2+p^2+2\sqrt{m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2+2mnp(m+n+p)}}\\
&\geq \sqrt{m^2+n^2+p^2+2\sqrt{m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2}}
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức này và các bất đẳng thức (2.2), (2.3), ta được

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{x}{3x^2+2yz}} \geq \sqrt{\sum_{\text{cyc}} \frac{x}{3x^2+2yz} + 2\sqrt{\sum_{\text{cyc}} \frac{xy}{(3x^2+2yz)(3y^2+2zx)}}}$$
$$\geq \sqrt{\frac{4}{3(x+y+z)} + 2\sqrt{\frac{4}{9(x+y+z)^2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3(x+y+z)}}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

♡♡♡

90 *Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa $a^2+b^2+c^2 = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$, chứng minh bất đẳng thức*

1. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 5$ *2.* $\frac{1}{12} \leq \frac{a^2b+b^2c+c^2a}{(a+b+c)^3} \leq \frac{5}{36}$

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Chú ý rằng điều kiện đề bài và các bất đẳng thức trên sẽ không đổi nếu ta thay (a, b, c) bởi $(-a, -b, -c)$. Như vậy, ta chỉ cần xét $a > 0$, khi đó

Nếu $b > 0 > c$ thì

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-(a^2+b^2+c^2) = (a-b)^2+c^2-2c(a+b) > 0$$

Nếu $c > 0 > b$ thì

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-(a^2+b^2+c^2) = (a-c)^2+b^2-2b(a+c) > 0$$

Nếu $b < 0, c < 0$ thì

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-(a^2+b^2+c^2) = (b-c)^2+a^2-2a(b+c) > 0$$

Như thế, ta chỉ cần xét $b > 0$ và $c > 0$ là đủ. Từ

$$\begin{aligned} 0 &= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-(a^2+b^2+c^2) \\ &= -\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) \end{aligned}$$

Ta suy ra được $\sqrt{a} = \sqrt{b}+\sqrt{c}$, do đó bất đẳng thức tương đương với

1. $$\frac{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2} \geq 5$$

2. $$\frac{1}{12} \leq \frac{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^4 b + b^2c + c^2\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{\left(\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2+b+c\right)^3} \leq \frac{5}{36}$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{b}{c}} > 0$, ta phải chứng minh

1. $$\frac{(t+1)^2}{t^2} + t^2 + \frac{1}{(t+1)^2} \geq 5$$

2. $$\frac{2}{3} \leq \frac{(t+1)^4t^2+t^4+(t+1)^2}{(t^2+t+1)^3} \leq \frac{10}{9}$$

Thật vậy, bất đẳng thức (1) tương đương với $(t^3+t^2-2t-1)^2 \ge 0$, vế trái của bất đẳng thức (2) tương đương với $(t^3+3t^2-1)^2 \ge 0$, và vế phải tương đương với $(t^3-3t^2-6t-1)^2 \ge 0$.

Vậy ta có đpcm.

♡♡♡

91 *Tìm hằng số $k>0$ nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức*

$$\sqrt{a+k(b-c)^2}+\sqrt{b+k(c-a)^2}+\sqrt{c+k(a-b)^2} \ge \sqrt{3}$$

đúng với mọi $a,b,c \ge 0$ và $a+b+c=1$.

Lời giải. Cho $a=b=\frac{1}{2}, c=0$, ta được $k \ge 1$. Ta sẽ chứng minh $k=1$ là giá trị cần tìm, tức là

$$\sqrt{a+(b-c)^2}+\sqrt{b+(c-a)^2}+\sqrt{c+(a-b)^2} \ge \sqrt{3}$$

Bình phương 2 vế, ta có thể viết bất đẳng thức lại như sau

$$\sum_{\text{cyc}}(b-c)^2+2\sum_{\text{cyc}}\sqrt{(a+(b-c)^2)(b+(a-c)^2)} \ge 2$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}}\sqrt{(a+(b-c)^2)(b+(a-c)^2)} \ge \sum_{\text{cyc}}\sqrt{ab}+\sum_{\text{cyc}}|(a-c)(b-c)|$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}}(b-c)^2+2\sum_{\text{cyc}}\sqrt{ab}+2\sum_{\text{cyc}}|(a-c)(b-c)| \ge 2$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c \ge 0$, khi đó

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{cyc}}(b-c)^2+2\sum_{\text{cyc}}\sqrt{ab}+2\sum_{\text{cyc}}|(a-c)(b-c)|-2 &= 4(a-c)^2-2\left(1-\sum_{\text{cyc}}\sqrt{ab}\right)\\
&= 4(a-c)^2-\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2-\left(\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\right)\\
&\ge 4(a-c)^2-2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2=2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2\left(2\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)^2-1\right)\\
&\ge 2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2(2(a+c)-1)=2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2(a-b+c) \ge 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Vậy ta có

$$k_{\min}=1.$$

♡♡♡

92 *Chứng minh rằng với mọi $a,b,c \ge 0$ thì*

$$\sqrt{\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3+abc}{(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3+abc}{(a+b)^3}} \ge \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

Lời giải. Bình phương 2 vế, ta có bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}+2\sum_{\text{cyc}}\sqrt{\frac{(a^3+abc)(b^3+abc)}{(a+c)^3(b+c)^3}} \ge \sum_{\text{cyc}}\frac{a^2}{(b+c)^2}+2\sum_{\text{cyc}}\frac{ab}{(a+c)(b+c)}$$

Chú ý rằng $(a^2+bc)(b^2+ca)-ab(a+c)(b+c)=c(a-b)^2(a+b)\geq 0$, nên

$$\frac{(a^3+abc)(b^3+abc)}{(a+c)^3(b+c)^3}\geq \frac{a^2b^2}{(a+c)^2(b+c)^2}$$

và do đó

$$\sqrt{\frac{(a^3+abc)(b^3+abc)}{(a+c)^3(b+c)^3}}\geq \frac{ab}{(a+c)(b+c)}$$

Như vậy, ta còn phải chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}\geq \sum_{\text{cyc}}\frac{a^2}{(b+c)^2}$$

Ta có

$$\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)=\sum_{\text{cyc}}\frac{a(a-b)(a-c)}{(b+c)^3}\geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

♡♡♡

93 *Cho các số dương a,b,c, chứng minh rằng*

$$\frac{ab^2}{c^2}+\frac{bc^2}{a^2}+\frac{ca^2}{b^2}+a+b+c\geq \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{ab^2}{c^2}+\sum_{\text{cyc}}a\right)\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a(b^2+c^2)}\right)=\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{a(b^2+c^2)}{c^2}\right)\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a(b^2+c^2)}\right)\geq\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a}\right)^2$$

Ta cần chứng minh

$$\left(\sum_{\text{cyc}}a\right)\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a}\right)^2\geq 6\left(\sum_{\text{cyc}}a^2\right)\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a(b^2+c^2)}\right)$$

Hay

$$\left(\sum_{\text{cyc}}a\right)\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a}\right)^2-9\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a}\geq 3\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{2a}{b^2+c^2}-\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a}\right)$$

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{(a-b)^2}{ab}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3(a+b)(c^2-ab)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\right)\geq 0$$

+, Nếu $\frac{1}{c}\geq\frac{2(a+b)}{ab}$, thì

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3(a+b)(c^2-ab)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{3(a+b)}{ab}\geq 0$$

+, Nếu $\frac{1}{c} \le \frac{2(a+b)}{ab}$ hay $c \ge \frac{ab}{2(a+b)}$, thì

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3(a+b)(c^2-ab)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\\
&\qquad = \frac{c^4(ab+bc+ca)+abc^2(a^2+b^2)+(a+b)(a^2+b^2+3ab)c^3+a^3b^3-2a^2b^2c(a+b)}{abc(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\\
&\qquad \ge \frac{abc^2(a^2+b^2)+(a+b)^3c^3+a^3b^3-2a^2b^2c(a+b)}{abc(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\\
&\qquad \ge \frac{\frac{a^3b^3(a^2+b^2)}{4(a+b)^2}+(a+b)^3c^3+a^3b^3-2a^2b^2c(a+b)}{abc(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\\
&\qquad \ge \frac{(a+b)^3c^3+\frac{9}{16}a^3b^3+\frac{9}{16}a^3b^3-2a^2b^2c(a+b)}{abc(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\\
&\qquad \ge \frac{3\sqrt[3]{\frac{81}{256}}a^2b^2c(a+b)-2a^2b^2c(a+b)}{abc(a^2+c^2)(b^2+c^2)} \ge 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

94 *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

với $a,b,c \ge 0$ *thỏa* $a^2+b^2+c^2=1$.

Lời giải. Nếu $a \ge b \ge c \ge 0$, ta có $P \le 0$. Nếu $c \ge b \ge a \ge 0$ thì

$$\begin{aligned}
P &= (c-b)(b-a)(c-a)(a+b+c) = (c-b)(b-a)(c^2+bc-a^2-ab)\\
&\le b(c-b)(c^2+bc) = (c^2-bc)(b^2+bc) \le \frac{1}{4}(b^2+c^2)^2 \le \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Cho $a=0, b=\sin\frac{\pi}{8}, c=\cos\frac{\pi}{8}$, ta được $P=\frac{1}{4}$. Vậy

$$\max P = \frac{1}{4}.$$

♡♡♡

95 *Với mọi số dương* a,b,c,d,

$$\frac{b(a+c)}{c(a+b)}+\frac{c(b+d)}{d(b+c)}+\frac{d(c+a)}{a(c+d)}+\frac{a(d+b)}{b(d+a)} \ge 4$$

Lời giải. Bất đẳng thức được viết lại như sau

$$(a+c)\left(\frac{b}{c(a+b)}+\frac{d}{a(c+d)}\right)+(b+d)\left(\frac{c}{d(b+c)}+\frac{a}{b(d+a)}\right) \ge 4$$

Hay

$$(abc+abd+acd+bcd)\left(\frac{a+c}{ac(a+b)(c+d)}+\frac{b+d}{bd(b+c)(d+a)}\right) \ge 4$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}+\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)}\right) \ge 4$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}+\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)} &\geq \frac{4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2}+\frac{4\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2}\\ &= \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=c, b=d$.

♡♡♡

96 *Chứng mình rằng với mọi số thực a,b,c thì*

$$\frac{a^2-bc}{a^2+2b^2+3c^2}+\frac{b^2-ca}{b^2+2c^2+3a^2}+\frac{c^2-ca}{c^2+2a^2+3b^2}\geq 0$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cyc}}\frac{4(a^2-bc)}{a^2+2b^2+3c^2} &= \sum_{\text{cyc}}\left(\frac{4(a^2-bc)}{a^2+2b^2+3c^2}+1\right)-3\\ &= 2\sum_{\text{cyc}}\frac{(b-c)^2}{a^2+2b^2+3c^2}+\sum_{\text{cyc}}\frac{5a^2+c^2}{a^2+2b^2+3c^2}-3\\ &\geq \sum_{\text{cyc}}\frac{5a^2+c^2}{a^2+2b^2+3c^2}-3\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{5a^2+c^2}{a^2+2b^2+3c^2}\geq 3$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{5x+z}{x+2y+3z}\geq 3 \qquad \forall x,y,z>0$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta được

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cyc}}\frac{5x+z}{x+2y+3z} &\geq \frac{36(x+y+z)^2}{\sum_{\text{cyc}}(5x+z)(x+2y+3z)}\\ &= \frac{9(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+7(xy+yz+zx)}\end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có

$$3(x+y+z)^2-2(x^2+y^2+z^2)-7(xy+yz+zx)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

97 *Cho các số không âm x,y,z, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{x^4}{x^4+x^2yz+y^2z^2}+\frac{y^4}{y^4+y^2zx+z^2x^2}+\frac{z^4}{z^4+z^2xy+x^2y^2}\geq 1$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{x^4}{x^4+x^2yz+y^2z^2} &\geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\sum_{cyc}x^4+\sum_{cyc}x^2yz+\sum_{cyc}y^2z^2}\\ &\geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\sum_{cyc}x^4+2\sum_{cyc}y^2z^2}=1\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Nhận xét. Đặt $a=\frac{yz}{x^2}, b=\frac{zx}{y^2}, c=\frac{xy}{z^2}$, ta được

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+a+1}\geq 1 \qquad \forall a,b,c>0, abc=1 \tag{2.4}$$

Từ đây, ta lại đặt $a=\frac{n}{m}, b=\frac{p}{n}, c=\frac{m}{p}$ $(m,n,p>0)$, như thế ta có

$$\sum_{cyc}\frac{m^2}{m^2+mn+n^2}\geq 1 \tag{2.5}$$

♡♡♡

98 *Cho các số dương a,b,c thỏa $abc=1$, chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\leq 3$$

Lời giải. Sử dụng **97**(2.4) khi thay (a,b,c) lần lượt bởi $\left(\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}\right)$, ta được

$$\sum_{cyc}\frac{a^4}{a^4+a^2+1}\geq 1$$

Hay

$$\sum_{cyc}\frac{2(a^2+1)}{a^4+a^2+1}\leq 4$$

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+a+1}+\sum_{cyc}\frac{1}{a^2-a+1}\leq 4$$

Lại sử dụng **97**(2.4), ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

♡♡♡

99 *Chứng minh rằng với mọi số dương a,b,c,*

$$\frac{3a^2-2ab-b^2}{3a^2+2ab+3b^2}+\frac{3b^2-2bc-c^2}{3b^2+2bc+3c^2}+\frac{3c^2-2ca-a^2}{3c^2+2ca+3a^2}\geq 0$$

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc}\left(1-\frac{3a^2-2ab-b^2}{3a^2+2ab+3b^2}\right)\leq 3$$

Hay

$$\sum_{cyc}\frac{b(a+b)}{3a^2+2ab+3b^2}\leq\frac{3}{4}$$

Do $3a^2+2ab+3b^2 \geq \frac{8}{3}(a^2+ab+b^2)$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{b(a+b)}{\frac{8}{3}(a^2+ab+b^2)} \leq \frac{3}{4}$$

Hay

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{a^2+ab+b^2} \geq 1$$

Đây chính là **97**(2.5). Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

100 *Cho các số dương a,b,c thỏa $a^4+b^4+c^4=3$, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a^2}{b^3+1}+\frac{b^2}{c^3+1}+\frac{c^2}{a^3+1} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \frac{a^2}{1+b^3} &= \sum_{cyc} a^2 - \sum_{cyc} \frac{a^2b^3}{1+b^3} \geq \sum_{cyc} a^2 - \frac{1}{2}\sum_{cyc} a^2b^{3/2} \geq \sum_{cyc} a^2 - \frac{1}{4}\sum_{cyc} a^2b(b+1)\\ &= \sum_{cyc} a^2 - \frac{1}{4}\sum_{cyc} a^2b^2 - \frac{1}{4}\sum_{cyc} a^2b \geq \sum_{cyc} a^2 - \frac{1}{4}\sum_{cyc} a^2b^2 - \frac{1}{8}\sum_{cyc} a^2(b^2+1)\\ &= \frac{7}{8}\sum_{cyc} a^2 - \frac{3}{8}\sum_{cyc} a^2b^2\end{aligned}$$

Đặt $x=a^2+b^2+c^2$ thì ta có $3 \geq x \geq \sqrt{3}$ và $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{x^2-3}{2}$, ta cần chứng minh

$$7\sum_{cyc} a^2 - 3\sum_{cyc} a^2b^2 \geq 12$$

Hay

$$7x - \frac{3(x^2-3)}{2} \geq 12$$

$$(x-3)(3x-5) \leq 0 \text{ (đúng)}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

♡♡♡

101 *Cho các số dương a,b,c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{9}{2}\cdot\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{(a+b+c)^4} \geq \frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{b+c}+\frac{c^3}{c+a}$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \frac{a^3-b^3}{a+b} &= \sum_{cyc} \frac{(a-b)((a+b)^2-ab)}{a+b} = \sum_{cyc}(a-b)(a+b) - \sum_{cyc} \frac{ab(a-b)}{a+b}\\ &= \frac{(ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\end{aligned}$$

Suy ra

$$2\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3}{a+b}=\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3+b^3}{a+b}+\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3-b^3}{a+b}=2\sum_{\text{cyc}}a^2-\sum_{\text{cyc}}ab+\frac{(ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{9(a^2+b^2+c^2)^3}{(a+b+c)^4}+\sum_{\text{cyc}}ab-2\sum_{\text{cyc}}a^2\ge\frac{(ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Đặt $x=a^2+b^2+c^2, y=ab+bc+ca$ thì ta có $x\ge y$ và

$$VT=\frac{9x^3}{(x+2y)^2}+y-2x=\frac{(x-y)(7x^2-4y^2)}{(x+2y)^2}\ge\frac{3x^2(x-y)}{(x+2y)^2}\ge\frac{x(x-y)}{x+2y}$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc\ge\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Ngoài ra, ta cũng dễ thấy rằng ta chỉ cần xét bất đẳng thức trong trường hợp $c\ge b\ge a$ là đủ. Như thế, từ các lập luận trên, ta suy ra ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{x(x-y)}{x+2y}\ge\frac{9(a-b)(b-c)(c-a)}{8(a+b+c)}$$

Hay

$$8(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\ge 9(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

$$\frac{1}{16}\sum_{\text{cyc}}(8a^2-8b^2+6ab+5bc-11ca)^2+\frac{101}{16}\sum_{\text{cyc}}c^2(a-b)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng, vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

102 *Cho các số dương a,b,c,d thỏa $a+b+c+d=4$, tìm hằng số k tốt nhất sao cho*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}-4\ge k(a^2+b^2+c^2+d^2-4)$$

Lời giải. Cho $a=b=c=\frac{2}{3}, d=2$, ta suy ra được $k\le\frac{3}{4}$. Ta sẽ chứng minh đây là giá trị cần tìm, tức là

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\ge 1+\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $d\ge c\ge b\ge a$, suy ra $a+b\le a+c\le 2, b+c\le\frac{8}{3}$, đặt $t=\frac{a+b+c}{3}\le 1$, ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)\ge\frac{3}{t}-\frac{9}{4}t^2$$

Hay

$$4(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-36\ge(a+b+c)(3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2)$$

$$\sum_{\text{cyc}}x(b-c)^2\ge 0$$

với $x = \frac{4}{bc} - a - b - c, y = \frac{4}{ca} - a - b - c, z = \frac{4}{ab} - a - b - c$. Ta có

$$z = \frac{4}{ab} - a - b - c \geq \frac{16}{(a+b)^2} - 3 \geq 4 - 3 = 1 > 0$$

$$y = \frac{4}{ca} - a - b - c \geq \frac{16}{(a+c)^2} - 3 \geq 4 - 3 = 1 > 0$$

$$x + y = \frac{4}{ac} + \frac{4}{bc} - 2(a+b+c) \geq \frac{16}{(a+c)^2} + \frac{16}{(b+c)^2} - 6 \geq 4 + \frac{9}{4} - 6 = \frac{1}{4} > 0$$

Do đó bất đẳng thức trên đúng. Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{3}{t} + \frac{1}{d} \geq 1 + \frac{3}{4}(3t^2 + d^2)$$

Hay

$$\frac{3}{t} + \frac{1}{4-3t} \geq 1 + \frac{3}{4}(3t^2 + (4-3t)^2)$$

Ta có

$$VT - VP = \frac{3(3t-2)^2(t-1)^2}{t(4-3t)} \geq 0$$

Vậy ta có đpcm, từ đó ta đi đến kết luận

$$k_{\max} = \frac{3}{4}.$$

Nhận xét. Có thể thấy kết quả này mạnh hơn kết quả sau của Phạm Kim Hùng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Thật vậy, đặt $x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4$, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$64VT \geq 16\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a}\right)^2 \geq (3x+4)^2$$

Lại có $(3x+4)^2 - 64x = (x-4)(9x-4) \geq 0$ nên bất đẳng thức đúng.

♡♡♡

103 *Cho các số dương x, y, z thỏa $xy + yz + zx = 1$, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{x(y+z)^2}{(1+yz)^2} + \frac{y(z+x)^2}{(1+zx)^2} + \frac{z(x+y)^2}{(1+xy)^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Lời giải. Đặt $a = yz, b = zx, c = xy$ thì ta có $a + b + c = 1$ và bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{\sqrt{a}(b+c)^2}{\sqrt{bc}(1+a)^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a(1-a)^2}{(1+a)^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{abc}$$

$$\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a(1-a)^2}{(1+a)^2} - a\right) + 1 \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{abc}$$

$$1-\frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{abc}\ge 4\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2}{(a+1)^2}$$

Đặt $q=ab+bc+ca, R=\sqrt{3abc}$, sử dụng bất đẳng thức AM–GM và bất đẳng thức Schur, ta có

$$q=ab+bc+ca\ge\sqrt{3abc(a+b+c)}=\sqrt{3abc}=R$$

$$q=ab+bc+ca\le\frac{1+9abc}{4}=\frac{3R^2+1}{4}$$

$$9R^2=27abc\le(a+b+c)^3=1$$

Suy ra $\frac{3R^2+1}{4}\ge q\ge R$ và $1\ge 3R$, bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$f(q)=\frac{12(6q^2+4R^2q+R^4-6R^2+3)}{(3q+R^2+6)^2}+\frac{3}{4}R-1\le 0$$

Ta có

$$f''(q)=\frac{216(33-26R^2-24q+R^4)}{(3q+R^2+6)^4}\ge\frac{216\left(33-26\cdot\frac{1}{9}-24\cdot\frac{1}{3}\right)}{(3q+R^2+6)^4}=\frac{4776}{(3q+R^2+6)^4}>0$$

Suy ra $f(q)$ là hàm lồi, do đó ta có

$$f(q)\le\max\left\{f(R),f\left(\frac{3R^2+1}{4}\right)\right\}$$

Lại có

$$f(R)=\frac{R(3R-1)(R^3+21R^2+84R+36)}{4(R^2+3R+6)^2}\le 0$$

$$f\left(\frac{3R^2+1}{4}\right)=\frac{(3R-1)(169R^4+1719R^3+546R^2+81(3R-1)(3R-4))}{4(13R^2+27)^2}\le 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=1,b=c=0$ và các hoán vị.

Nhận xét. Bất đẳng thức trên có dạng lượng giác như sau

$$\frac{\sin A}{\cos^2\frac{B-C}{2}}+\frac{\sin B}{\cos^2\frac{C-A}{2}}+\frac{\sin C}{\cos^2\frac{A-B}{2}}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Kết quả này được tác giả đặt ra từ kết quả sau $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$, tất nhiên các bạn có thể chứng minh "dạng lượng giác" bằng kỹ thuật dồn biến trong tam giác nhưng xem ra có vẻ dài hơn! Lời giải trên tuy phức tạp nhưng lại có vẻ ngắn gọn!

♡♡♡

104 *Cho các số không âm a,b,c thỏa $a+b+c=3$, chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{a+\sqrt{b^2+c^2}}+\sqrt{b+\sqrt{c^2+a^2}}+\sqrt{c+\sqrt{a^2+b^2}}\ge 3\sqrt{\sqrt{2}+1}$$

Lời giải. Bình phương hai vế, ta có thể viết lại bất đẳng thức như sau

$$\sum_{\text{cyc}}\sqrt{a^2+b^2}+2\sum_{\text{cyc}}\sqrt{\left(a+\sqrt{b^2+c^2}\right)\left(b+\sqrt{a^2+c^2}\right)}\ge 9\sqrt{2}+6$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}2\sum_{cyc}\sqrt{\left(a+\sqrt{b^2+c^2}\right)\left(b+\sqrt{a^2+c^2}\right)} &\ge 2\sum_{cyc}\sqrt{\left(a+\frac{b+c}{\sqrt{2}}\right)\left(b+\frac{a+c}{\sqrt{2}}\right)}\\ &= \sqrt{2}\sum_{cyc}\sqrt{\left(\left(\sqrt{2}-1\right)a+3\right)\left(\left(\sqrt{2}-1\right)b+3\right)}\\ &\ge \sqrt{2}\sum_{cyc}\left(\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{ab}+3\right) = \left(2-\sqrt{2}\right)\sum_{cyc}\sqrt{ab}+9\sqrt{2}\end{aligned}$$

Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau với mọi $x, y \ge 0$

$$\sqrt{x^4+y^4}+\left(2-\sqrt{2}\right)xy \ge x^2+y^2$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{2}(VT-VP) &= (x-y)^2\left(\frac{(x+y)^2}{\sqrt{2(x^4+y^4)}+x^2+y^2}-\sqrt{2}+1\right)\\ &\ge (x-y)^2\left(\frac{(x+y)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)(x^2+y^2)}-\sqrt{2}+1\right) = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)xy(x-y)^2}{x^2+y^2} \ge 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

♡♡♡

105 *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, chứng minh rằng*

$$\frac{a}{3a+b-c}+\frac{b}{3b+c-a}+\frac{c}{3c+a-b} \ge 1$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{4a}{3a+b-c}-3 = \sum_{cyc}\left(\frac{4a}{3a+b-c}-1\right) &= \sum_{cyc}\frac{a-b+c}{3a+b-c}\\ &\ge \frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc}(a-b+c)(3a+b-c)} = \frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc}a^2+2\sum_{cyc}ab} = 1\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

106 *Cho các số dương a, b, c thỏa $a^2+b^2+c^2=3$, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a}{ab+3}+\frac{b}{bc+3}+\frac{c}{ca+3} \le \frac{3}{4}$$

Lời giải. Ta có bất đẳng thức tương đương

$$4abc\sum_{cyc}ab+12\sum_{cyc}ab^2+36abc+36\sum_{cyc}a \le 3a^2b^2c^2+9abc\sum_{cyc}a+27\sum_{cyc}ab+81$$

Không mất tính tổng quát, giả sử b là số hạng nằm giữa a và c, suy ra

$$a(b-a)(b-c) \le 0$$

hay

$$ab^2 + ca^2 \le a^2b + abc$$

Như thế

$$\sum_{\text{cyc}} ab^2 \le b(a^2+c^2) + abc = b(a+c)^2 - abc \le \frac{4}{27}(a+b+c)^3 - abc$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$4abc\sum_{\text{cyc}} ab + 12\left(\frac{4}{27}(a+b+c)^3 - abc\right) + 36abc + 36\sum_{\text{cyc}} a \le 3a^2b^2c^2 + 9abc\sum_{\text{cyc}} a + 27\sum_{\text{cyc}} ab + 81$$

Đặt $p = a+b+c, q = ab+bc+ca, r = abc$ thì ta có $p^2 - 2q = 3$. Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có $\frac{(p^2-3)^2}{4} = q^2 \ge 3pr$, bất đẳng thức trở thành

$$f(r) = 3r^2 - (2p^2 - 9p + 18)r - \frac{16}{9}p^3 + \frac{27}{2}p^2 - 36p + \frac{81}{2} \ge 0$$

Ta có

$$\begin{aligned} f'(r) = 6r - 2p^2 + 9p - 18 &\le \frac{(p^2-3)^2}{2p} - 2p^2 + 9p - 18 \\ &= \frac{(p-1)(p-3)(p^2+2) - 18}{2p} \le 0 \end{aligned}$$

Do đó $f(r)$ là hàm nghịch biến, suy ra

$$f(r) \ge f\left(\frac{(p^2-3)^2}{12p}\right) = \frac{(p-3)(3p^7 - 15p^6 + 27p^5 - 247p^4 + 717p^3 - 1953p^2 + 621p - 81)}{144p^2}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} 3p^7 - 15p^6 + 27p^5 - 247p^4 + 717p^3 - 1953p^2 + 621p - 81 \\ &\le -6p^6 + 27p^5 - 247p^4 + 717p^3 - 1953p^2 + 621p - 81 \\ &\le 21p^5 - 247p^4 + 717p^3 - 1953p^2 + 621p - 81 \\ &\le -184p^4 + 717p^3 - 1953p^2 + 621p - 81 \\ &\le 533p^3 - 1953p^2 + 621p - 81 \\ &\le -3(118p^2 - 207p + 27) \le 0 \text{ (do } p \ge \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

♡♡♡

107 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2+(c+a)^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{c^2+(a+b)^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2+(b+c)^2}} \le \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^2}{b^2+(c+a)^2}}\right)^2 &\le \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{(b^2+(c+a)^2)(c^2+(a+b)^2)}\right)\left(\sum_{\text{cyc}} a(c^2+(a+b)^2)\right) \\ &= \frac{((a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+6abc)((a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+2(a^2b+b^2c+c^2a))}{(a^2+b^2+c^2+2ab)(a^2+b^2+c^2+2bc)(a^2+b^2+c^2+2ca)} \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$, khi đó dễ dàng chứng minh được

$$a^2b+b^2c+c^2a \le \frac{4}{27} - abc$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(a^2+b^2+c^2+6abc)\left(a^2+b^2+c^2+\frac{8}{27}-2abc\right)}{(a^2+b^2+c^2+2ab)(a^2+b^2+c^2+2bc)(a^2+b^2+c^2+2ca)} \le \frac{9}{5}$$

Đặt $a^2+b^2+c^2 = \frac{1+2q^2}{3}, r = abc$ $(1 \ge q \ge 0)$ thì ta có $\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27} \ge r \ge \max\left\{0, \frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}\right\}$, bất đẳng thức tương đương với

$$2673r^2+72(3q^2-1)r+36q^4+16q^2-1 \ge 0$$

Nếu $3q^2 \ge 1$ thì bất đẳng thức là hiển nhiên. Nếu $1 \le 2q \le \frac{2}{\sqrt{3}}$ thì

$$\begin{aligned} VT &\ge 72(3q^2-1)\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}+36q^4+16q^2-1 \\ &= 16q^5+4q^3\left(3q-\frac{4}{3}\right)+\left(32q^2-\frac{11}{3}\right) > 0 \end{aligned}$$

Nếu $1 \ge 2q$ thì

$$\begin{aligned} VT &\ge 2673\left(\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}\right)^2+72(3q^2-1)\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}+36q^4+16q^2-1 \\ &= \frac{q^2(44q^4+180q^3+135q^2+30(1-2q))}{3} \ge 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét. Ngoài ra, ta cũng có kết quả sau

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2+(c+a)^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{c^2+(a+b)^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2+(b+c)^2}} \ge 1$$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2}{b^2+(c+a)^2}}\right)^2\left(\sum_{cyc}a(b^2+(c+a)^2)\right) \ge (a+b+c)^3$$

Lại có

$$(a+b+c)^3-\sum_{cyc}a(b^2+(c+a)^2) = 2\sum_{cyc}a^2b+6abc \ge 0$$

Từ đây ta dễ dàng suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) \sim (1,0,0)$.

♡♡♡

108 *Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a(a-b)}{a^2+2bc}+\frac{b(b-c)}{b^2+2ca}+\frac{c(c-a)}{c^2+2ab} \ge 0$$

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a(a-b)}{a^2+2bc}+1\right) \ge 3$$

Hay

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2 - ab + 2bc}{a^2 + 2bc} \geq 3$$

Do a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác nên $c \geq b-a$, do đó ta có $2a^2-ab+2bc \geq 2a^2-ab+2b(b-a) = 2(a-b)^2 + ab \geq 0$. Như thế, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2 - ab + 2bc}{a^2 + 2bc} \geq \frac{(2(a^2+b^2+c^2) + ab + bc + ca)^2}{\sum_{cyc}(2a^2 - ab + 2bc)(a^2 + 2bc)}$$

Ta cần chứng minh

$$(2(a^2+b^2+c^2) + ab + bc + ca)^2 \geq 3\sum_{cyc}(2a^2 - ab + 2bc)(a^2 + 2bc)$$

Hay

$$7\sum_{cyc} a^3b + 4\sum_{cyc} ab^3 \geq 2\sum_{cyc} a^4 + 3\sum_{cyc} a^2b^2 + 6\sum_{cyc} a^2bc$$

Lại do a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên tồn tại các số dương x, y, z sao cho $a = y+z, b = z+x, c = x+y$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$2\sum_{cyc} x^4 + 2\sum_{cyc} xy(x^2+y^2) + 3\sum_{cyc} xy^3 \geq 6\sum_{cyc} x^2y^2 + 3\sum_{cyc} x^2yz$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$2\sum_{cyc} x^4 \geq 2\sum_{cyc} x^2y^2, \qquad 2\sum_{cyc} xy(x^2+y^2) \geq 4\sum_{cyc} x^2y^2, \qquad 3\sum_{cyc} xy^3 \geq 3\sum_{cyc} x^2yz$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

♡♡♡

109 *Cho các số dương a, b, c, chứng minh*

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2 + 7ab + b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2 + 7bc + c^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2 + 7ca + a^2}} \geq 1$$

Lời giải. Đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, e = \frac{a}{c}$ thì ta có $xyz = 1$, bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 7x + 1}} \geq 1$$

Do $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$ nên tồn tại $m, n, p > 0$ sao cho $x = \frac{n^2p^2}{m^4}, y = \frac{p^2m^2}{n^4}, z = \frac{m^2n^2}{p^4}$, ta phải chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{m^4}{\sqrt{m^8 + 7m^4n^2p^2 + n^4p^4}} \geq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\left(\sum_{cyc} \frac{m^4}{\sqrt{m^8 + 7m^4n^2p^2 + n^4p^4}}\right)^2 \left(\sum_{cyc} m(m^8 + 7m^4n^2p^2 + n^4p^4)\right) \geq (m^3 + n^3 + p^3)^3$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh

$$(m^3 + n^3 + p^3)^3 \geq \sum_{cyc} m(m^8 + 7m^4n^2p^2 + n^4p^4)$$

Hay

$$\sum_{\text{sym}}(5m^6n^3 + 2m^3n^3p^3 - 7m^5n^2p^2) + \sum_{\text{sym}}(m^6n^3 - m^4n^4p) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng, vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $\frac{b}{a} \to 0, \frac{c}{b} \to 0$ và các hoán vị tương ứng.

Nhận xét. Tổng quát hơn, ta có kết quả sau

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+kab+b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2+kbc+c^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2+kca+a^2}} \geq \min\left\{1, \frac{3}{\sqrt{k+2}}\right\} \qquad \forall k \geq -2$$

Thật vậy, theo chứng minh trên rõ ràng ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức cho trường hợp $k \geq 7$, khi đó sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{m^4}{\sqrt{m^8+km^4n^2p^2+n^4p^4}}\right)^2 \left(\sum_{\text{cyc}} m(m^8+km^4n^2p^2+n^4p^4)\right) \geq (m^3+n^3+p^3)^3$$

Ta sẽ chứng minh

$$(k+2)(m^3+n^3+p^3)^3 \geq 9\sum_{\text{cyc}} m(m^8+km^4n^2p^2+n^4p^4)$$

Hay

$$k(m^3+n^3+p^3)((m^3+n^3+p^3)^2 - 9m^2n^2p^2) + 2(m^3+n^3+p^3)^3 - 9\sum_{\text{cyc}} m^9 - 9\sum_{\text{cyc}} m^4n^4p \geq 0$$

Do $k \geq 7$ và $(m^3+n^3+p^3)^2 - 9m^2n^2p^2 \geq 0$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$7(m^3+n^3+p^3)((m^3+n^3+p^3)^2 - 9m^2n^2p^2) + 2(m^3+n^3+p^3)^3 - 9\sum_{\text{cyc}} m^9 - 9\sum_{\text{cyc}} m^4n^4p \geq 0$$

Hay

$$(m^3+n^3+p^3)^3 \geq \sum_{\text{cyc}} m(m^8+7m^4n^2p^2+n^4p^4)$$

Bất đẳng thức này đã được chứng minh ở trên.

♡♡♡

110 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+ca}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+ab}} \leq \sqrt{2}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}\right)^2 &= \left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{a^2+bc}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{(a+b)(a+c)}{a^2+bc}\right)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(a+b)(a+c)}\right) \\ &= \frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + 3\right)\end{aligned}$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + 3\right) \leq 2\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{b+c}\right)^2$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + 3 \le \frac{(a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)}$$

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} - 3 \le \frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)}$$

$$\sum_{\text{cyc}} (a-b)(a-c)\left(\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{(b+c)(a+b+c)}\right) \ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$, khi đó ta có $a - c \ge \frac{a}{b}(b-c) \ge 0$, do đó

$$\begin{aligned}
&\sum_{\text{cyc}} (a-b)(a-c)\left(\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{(b+c)(a+b+c)}\right) \\
&\quad \ge \frac{(a-b)(b-c)}{b}\left(a\left(\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{(b+c)(a+b+c)}\right) - b\left(\frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{(c+a)(a+b+c)}\right)\right) \\
&\quad = \frac{c(a-b)^2(a+b)(b-c)(a^2+b^2-ab+ac+bc)}{b(a+c)(b+c)(a^2+bc)(b^2+ac)} \ge 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

♡♡♡

111 *Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác, chưng minh rằng*

$$3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3\right) \ge 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} - 3\right)$$

Lời giải. Chú ý rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3 = \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(a-c)(b-c)}{ac}$$

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} - 3 = \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(a-c)(b-c)}{bc}$$

Do đó bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{(a-b)^2}{ab} \ge \left(\frac{3}{ac} - \frac{2}{bc}\right)(a-c)(c-b)$$

Với giả sử c là số hạng nằm giữa a và b, ta có

$$(a-b)^2 = (a-c+c-b)^2 \ge 4(a-c)(c-b) \ge 0$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{4}{ab} \ge \frac{3}{ac} - \frac{2}{bc}$$

Hay

$$\frac{4c}{ab} + \frac{2}{b} \ge \frac{3}{a}$$

Nếu $b \le c \le a$ thì ta có

$$\frac{4c}{ab} + \frac{2}{b} \ge \frac{4c}{a^2} + \frac{2}{a} \ge \frac{2a}{a^2} + \frac{2}{a} = \frac{4}{a} > \frac{3}{a}$$

Nếu $b \ge c \ge a$ thì ta có

$$\frac{4c}{ab} + \frac{2}{b} - \frac{3}{a} \ge \frac{4c}{a(a+c)} + \frac{2}{(a+c)} - \frac{3}{a} = \frac{c-a}{a(a+c)} \ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

♡♡♡

112 *Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác thì*

$$\frac{a^2b}{c}+\frac{b^2c}{a}+\frac{c^2a}{b}\ge a^2+b^2+c^2$$

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{c^2(a-b)^2}{ab}+\frac{(a^2+ac-bc)(a-c)(b-c)}{ac}\ge 0$$

Từ đây, với giả sử $c=\min\{a,b,c\}$, ta có $a^2+ac-bc=a(a+c)-bc\ge b(a-c)\ge 0$. Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

113 *Cho các số không âm a, b, c chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 12$$

Lời giải. **Cách 1.** Ta có bổ đề sau

Bổ đề. *Với mọi $a, b, c>0$, ta có*

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+1\ge\frac{21(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương

$$2(a+b+c)^2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+(a+b+c)^2\ge 21(a^2+b^2+c^2)$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3}{b}+4\sum_{\text{cyc}}ab+\sum_{\text{cyc}}\frac{c^2a}{b}+2\sum_{\text{cyc}}\frac{ca^2}{b}\ge 8\sum_{\text{cyc}}a^2$$

Hay

$$\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3}{b}+\sum_{\text{cyc}}ab-2\sum_{\text{cyc}}a^2\right)+\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{c^2a}{b}-\sum_{\text{cyc}}ab\right)+2\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{ca^2}{b}-\sum_{\text{cyc}}ab\right)\ge 6\left(\sum_{\text{cyc}}a^2-\sum_{\text{cyc}}ab\right)$$

$$\sum_{\text{cyc}}S_c(a-b)^2\ge 0$$

trong đó

$$S_a=\frac{b}{c}+\frac{2a}{c}+\frac{a}{b}-3,\qquad S_b=\frac{c}{a}+\frac{2b}{a}+\frac{b}{c}-3,\qquad S_c=\frac{a}{b}+\frac{2c}{b}+\frac{c}{a}-3$$

Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét bất đẳng thức đã cho trong trường hợp $a\ge b\ge c$ là đủ, khi đó dễ thấy $S_a\ge S_c$ và $S_a\ge 0$, ta có

$$S_b+S_c=\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}+\frac{2c(a+b)}{ab}+\frac{b}{c}-6\ge\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}+2\sqrt{\frac{2(a+b)}{a}}-6\ge 0$$

$$S_c+2S_b=\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+\frac{c(2a+3b)}{ab}+\frac{2b}{c}-9\ge\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+2\sqrt{\frac{2(2a+3b)}{a}}-9\ge 0$$

Do đó

+, Nếu $S_b \ge 0$, ta có $(a-c)^2 \ge (a-b)^2$ nên

$$VT \ge (S_b + S_c)(a-b)^2 \ge 0$$

+, Nếu $S_b \le 0$, theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có $(a-c)^2 \le (a-b)^2 + (b-c)^2$ nên

$$VT \ge (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2 \ge (S_c + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2 \ge 0$$

Bổ đề được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Trở lại bài toán của ta, sử dụng bổ đề trên và kết quả bài toán **1.17**, ta có

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \ge \frac{3}{2}\sum_{\text{cyc}} \frac{a+b}{c} - 6 \qquad \text{và} \qquad \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \ge \frac{10(a^4+b^4+c^4) - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

Suy ra

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \ge \frac{3}{4}\sum_{\text{cyc}} \frac{a+b}{c} + \frac{10(a^4+b^4+c^4) - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2}{2(a^2+b^2+c^2)^2} - 3$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{3}{4}\sum_{\text{cyc}} \frac{a+b}{c} + \frac{10(a^4+b^4+c^4) - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2}{2(a^2+b^2+c^2)^2} + \frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \ge 15$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$, đặt $ab+bc+ca = \frac{1-q^2}{3}, r = abc$ $(1 \ge q \ge 0)$ thì ta có $\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27} \ge r \ge \frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}$, bất đẳng thức trở thành

$$\left(\frac{1-q^2}{r} + \frac{729r}{(1+2q^2)^2}\right) + \frac{27r - 42(1-q^2)^2}{(1+2q^2)^2} + \frac{36(1-q^2)}{1+2q^2} \ge 49$$

Dễ dàng chứng minh được $f(r) = \frac{1-q^2}{r} + \frac{729r}{(1+2q^2)^2}$ là hàm nghịch biến theo r, nên ta có

$$\frac{1-q^2}{r} + \frac{729r}{(1+2q^2)^2} \ge \frac{27(1-q^2)}{(1-q)^2(1+2q)} + \frac{27(1-q)^2(1+2q)}{(1+2q^2)^2} = \frac{27(1+q)}{(1-q)(1+2q)} + \frac{27(1-q)^2(1+2q)}{(1+2q^2)^2}$$

Lại có

$$\frac{27r - 42(1-q^2)^2}{(1+2q^2)^2} \ge \frac{(1+q)^2(1-2q) - 42(1-q^2)^2}{(1+2q^2)^2}$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{27(1+q)}{(1-q)(1+2q)} + \frac{27(1-q)^2(1+2q)}{(1+2q^2)^2} + \frac{(1+q)^2(1-2q) - 42(1-q^2)^2}{(1+2q^2)^2} + \frac{36(1-q^2)}{1+2q^2} \ge 49$$

Hay

$$\frac{2q^2(q^2(11q-7)^2 + 189q^4 + q^3 + 36q^2 + 1)}{(1-q)(1+2q)(1+2q^2)^2} \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2. Ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề. *Với mọi $x, y, z > 0$ thỏa $xyz = 1$, ta có*

$$(x+y+z)^2 + \frac{15}{2} \ge \frac{11}{4}(x+y+z+xy+yz+zx)$$

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $z = \min\{x, y, z\}$ suy ra $t^2 = xy \ge 1$ $(t > 0)$, đặt $P(x, y, z) = VT$ thì ta có

$$P(x,y,z) - P(t,t,z) = \frac{\left(4xy(x+y) + 8xy\sqrt{xy} - 11xy - 3\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2}{4xy} \ge 0$$

Lại có

$$P(t,t,z) = P\left(t, t, \frac{1}{t^2}\right) = \frac{(5t^4 - 12t^3 + t^2 + 8t + 4)(t-1)^2}{4t^4} \ge 0$$

Bổ đề được chứng minh xong. Sử dụng kết quả này, ta có

$$\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right)^2 \ge \frac{11}{4}\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2+b^2}{c^2} - \frac{15}{2}$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh

$$11\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2+b^2}{c^2} - 30 \ge 36\left(4 - \frac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\right)^2$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a + b + c = 1$, đặt $ab + bc + ca = \frac{p^2 - q^2}{3}$ $(1 \ge q \ge 0)$ và $r = abc$ thì ta có $\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27} \ge r \ge 0$, bất đẳng thức trở thành

$$f(r) = \frac{11(1+2q^2)((1-q^2)^2 - 18r)}{27r^2} - 63 - \frac{36(11q^2+1)^2}{(1+2q^2)^2} \ge 0$$

Rõ ràng đây là hàm nghịch biến theo r nên ta có

$$f(r) \ge f\left(\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\right) = \frac{18q^2(8 - 28q + 61q^2 - 148q^3 + 778q^4 + 1112q^5 - 892q^6)}{(1+2q^2)^2(1-q)^2(1+2q)^2} \ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

♡♡♡

114 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^{2/3}$$

Lời giải. Ta có bất đẳng thức tương đương

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} + \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{abc} + \frac{3(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)}{a^2b^2c^2} + 6 \ge 27\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \ge \frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3}$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3} + \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{abc} + \frac{3(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)}{a^2b^2c^2} + 6 \ge 27\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^2$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a + b + c = 1$, đặt $ab + bc + ca = \frac{1-q^2}{3}$ $(1 \ge q \ge 0)$ và $r = abc$ thì ta có $\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27} \ge r \ge 0$, bất đẳng thức trở thành

$$f(r) = \frac{27(3r+q^2)^2}{81r^2 - 27(1-q^2)r + (1-q^2)^3} + \frac{3q^2}{r} + \frac{(1-q^2)((1-q^2)^2 - 27r)}{9r^2} + 24 - \frac{27(1+2q^2)^2}{(1-q^2)^2} \ge 0$$

Ta có

$$f'(r) = \frac{81(q^2+3r)((1-q^2)(1+2q^2)(2+q^2)-27(1+q^2)r)}{(81r^2-27(1-q^2)r+(1-q^2)^3)^2} - \frac{3}{r^2} - \frac{2(1-q^2)((1-q^2)^2-27r)}{9r^3}$$

Ta có

$$(1-q^2)^2 - 27r \geq (1-q^2)^2 - (1-q)^2(1+2q) = q^2(1-q)^2 \geq 0$$

Như thế, ta sẽ chứng minh $f'(r) \leq 0$ bằng cách chứng minh

$$\frac{27(q^2+3r)((1-q^2)(1+2q^2)(2+q^2)-27(1+q^2)r)}{(81r^2-27(1-q^2)r+(1-q^2)^3)^2} \leq \frac{1}{r^2}$$

Dễ chứng minh được $(1-q^2)(1+2q^2)(2+q^2) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$g(r) = \frac{r^2(q^2+3r)}{(81r^2-27(1-q^2)r+(1-q^2)^3)^2} \leq \frac{2}{81\sqrt{3}}$$

Ta có

$$g'(r) = -\frac{r(243r^3+81(1+q^2)r^2-9(1-q^2)^3r-2q^2(1-q^2)^3)}{81r^2-27(1-q^2)r+(1-q^2)^3)^3}$$

Dễ thấy $h(r) = 243r^3+81(1+q^2)r^2-9(1-q^2)^3r-2q^2(1-q^2)^3$ là hàm lồi nên

$$h(r) \leq \max\left\{h(0), h\left(\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\right)\right\}$$

Lại có

$$h(0) = -2q^2(1-q^2)^3 \leq 0$$

$$h\left(\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\right) = \frac{(q-1)^3(62q^6+267q^5+399q^4+344q^3+156q^2+51q+17)}{81} \leq 0$$

Do đó $h(r) \leq 0$, suy ra $g'(r) \leq 0$, vậy $g(r)$ là hàm đồng biến nên

$$g(r) \leq g\left(\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\right) = \frac{(1-q)(1+2q)^2(2q^3+6q^2+1)}{729(5q^3+9q^2+3q+1)}$$

Chú ý rằng $\sqrt{3} < \frac{7}{4}$ nên ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{(1-q)(1+2q)^2(2q^3+6q^2+1)}{729(5q^3+9q^2+3q+1)} \leq \frac{8}{567}$$

Hay

$$\frac{56q^6+168q^5-42q^4+248q^3+606q^2+195q+65}{5103(5q^3+9q^2+3q+1)} \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng, do đó $f(r)$ là hàm nghịch biến, suy ra

$$f(r) \geq f\left(\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\right) = \frac{27q^2(79q^8+140q^7+67q^6+52q^5-7q^4-14q^3+4q^2+2q+1)}{(1-q)^3(q+1)^2(2q+1)^2(5q^3+9q^2+3q+1)} \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

♡♡♡

115 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 2\sqrt[3]{\frac{9(a^3+b^3+c^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Lời giải. Sử dụng kết quả bài toán **1.113**, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{11}{4}\sum_{\text{cyc}}\frac{a+b}{c}-\frac{15}{2}\geq 4\left(\frac{9(a^3+b^3+c^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)^{2/3}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$, đặt $ab+bc+ca=\frac{1-q^2}{3}$ $(1\geq q\geq 0)$ và $r=abc$ thì ta có $\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\geq r\geq 0$, bất đẳng thức trở thành $f(r)\geq g(r)$ với

$$f(r)=\frac{11(1-q^2)}{12r}-\frac{63}{4}\qquad \text{và} \qquad g(r)=36\left(\frac{q^2+3r}{1-q^2-3r}\right)^{2/3}$$

Rõ ràng $f(r)$ là hàm nghịch biến theo r và $g(r)$ là hàm đồng biến theo r nên ta chỉ cần chứng minh

$$f\left(\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\right)\geq g\left(\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\right)$$

Đặt $x=\frac{1+2q}{1-q}\geq 1$ thì bất đẳng thức tương đương

$$\frac{11x^2-4x+11}{2x}\geq 4\left(\frac{9(x^3+2)}{2(x+1)^2}\right)^{2/3}$$

Hay

$$h(x)=\ln\frac{(11x^2-4x+11)^3(x+1)^4}{x^3(x^3+2)^2}-7\ln 2-4\ln 3\geq 0$$

Ta có

$$h'(x)=\frac{(x-1)(11x^5-14x^4-45x^3+10x^2+44x+66)}{x(x+1)(x^3+2)(11x^2-4x+11)}$$

Từ đây, ta có thể dễ dàng kiểm tra được bất đẳng thức trên. Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

116 *Cho các số không âm x,y,z thỏa $x+y^2+z^2=1$, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3}{z^2+zx+x^2}\geq\frac{1}{2}$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}3VT&=\sum_{\text{cyc}}\frac{3(x^3+y^3)}{2(x^2+xy+y^2)}\\&=\sum_{\text{cyc}}(x-y)^2\left(\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}-\frac{1}{\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}+x+y+z}\right)+\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}\\&\geq\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$x^2+y^2+z^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+x+y^2+z^2-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$$

Suy ra $3VT\geq\frac{3}{2}$, tức là $VT\geq\frac{1}{2}$. Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

117 *Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+a^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+b^2} \ge \frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}+\frac{c+a}{c+b}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$, ta có

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+a^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+b^2}-3=\frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}+\frac{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$$

$$\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}+\frac{c+a}{c+b}-3=\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{(a-c)(b-c)}{(a+b)(a+c)}$$

Như thế, bất đẳng thức tương đương với

$$(a-b)^2\left(\frac{(a+b)^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}-\frac{1}{(a+c)(b+c)}\right) + (a-c)(b-c)\left(\frac{(a+c)(b+c)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}-\frac{1}{(a+b)(a+c)}\right)\ge 0$$

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}-\frac{1}{(a+c)(b+c)} &\ge \frac{(a+b)^2}{(a+c)^2(b+c)^2}-\frac{1}{(a+c)(b+c)}\\ &=\frac{(a+b)^2-(a+c)(b+c)}{(a+c)^2(b+c)^2}\ge 0\end{aligned}$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{(a+c)^2(a+b)(b+c)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\ge 1$$

Do $(a+c)^2 \ge a^2+c^2$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$(a+b)(b+c)\ge a^2+b^2$$

Nếu $b \ge a \ge c$ thì ta có $(b+c)(a+b) \ge b(a+b) = b^2+ab \ge a^2+b^2$. Nếu $a \ge b \ge c$ thì ta có

$$(b+c)(a+b)\ge a(a+b)=a^2+ab\ge a^2+b^2$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) \sim (1, 1, 1)$ hoặc $(a, b, c) \sim (1, 1, 0)$.

♡♡♡

118 *Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác, chứng minh rằng*

$$3(a^3b+b^3c+c^3a)\ge (a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử c là số hạng nằm giữa a và b, suy ra $2c \ge \max\{a, b, c\}$.

Chú ý rằng

$$a^3b+b^3c+c^3a-abc(a+b+c)=c(a-b)^2(a+b)+a(a+c)(a-c)(b-c)$$

$$ab^3+bc^3+ca^3-abc(a+b+c)=c(a-b)^2(a+b)+b(b+c)(a-c)(b-c)$$

Nên bất đẳng thức tương đương với

$$c(a-b)^2(a+b)\ge (a-c)(c-b)(2a(a+c)-b(b+c))$$

Do c là số hạng nằm giữa a và b nên theo bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$(a-b)^2 = ((a-c)+(c-b))^2 \geq 4(a-c)(c-b) \geq 0$$

Như thế, ta cần chứng minh

$$4c(a+b) \geq 2a(a+c) - b(b+c)$$

Hay

$$b^2 + 5bc + 2a(c-a) \geq 0$$

Nếu $b \geq c \geq a$ thì bất đẳng thức là hiển nhiên, nếu $a \geq c \geq b$ thì

$$b^2 + 5bc + 2a(c-a) \geq (a-c)^2 + 5(a-c)c - 2a(a-c) = (a-c)(4c-a) \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

119 *Cho các số thực a,b,c, chứng minh bất đẳng thức*

$$15a^2b^2c^2 + 12(a^4+b^4+c^4)(a^2+b^2+c^2) \geq 11(a^6+b^6+c^6) + 30abc(a^3+b^3+c^3)$$

Lời giải. Chú ý rằng $abc(a^3+b^3+c^3) \leq |a||b||c|(|a|^3+|b|^3+|c|^3)$ nên không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét $a,b,c \geq 0$ là đủ. Ta có bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{\text{cyc}} a^6 + 12\sum_{\text{cyc}} c^4(a^2+b^2) + 15a^2b^2c^2 - 30\sum_{\text{cyc}} a^4bc \geq 0$$

Hay

$$\left(\sum_{\text{cyc}} a^6 - 3a^2b^2c^2\right) + 12\sum_{\text{cyc}} c^4(a-b)^2 - 6abc\left(\sum_{\text{cyc}} a^3 - 3abc\right) \geq 0$$

Dễ thấy

$$\sum_{\text{cyc}} a^6 - 3a^2b^2c^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\sum_{\text{cyc}}(a^2-b^2)^2$$

$$\sum_{\text{cyc}} a^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\sum_{\text{cyc}}(a-b)^2$$

Nên bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{\text{cyc}}(a-b)^2((a+b)^2(a^2+b^2+c^2) + 24c^4 - 6abc(a+b+c)) \geq 0$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$(a+b)^2(a^2+b^2+c^2) + 24c^4 - 6abc(a+b+c) \geq 0$$

Đặt $2t = a+b$ thì ta có

$$\begin{aligned}(a+b)^2(a^2+b^2+c^2) + 24c^4 - 6abc(a+b+c) &\geq 4t^2(2t^2+c^2) + 24c^4 - 6t^2c(2t+c)\\ &= 2(4t^4 - 6t^3c - t^2c^2 + 12c^4)\\ &= 2(t^2(t-3c)^2 + 3(t^2-2c^2)^2 + 2t^2c^2) \geq 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

120 *Cho các số không âm a, b, c, d thỏa $a+b+c+d=3$, chứng minh bất đẳng thức*

$$ab(b+c)+bc(c+d)+cd(d+a)+da(a+b) \le 4$$

Lời giải. Do vai trò hoán vị vòng quanh nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $b=\max\{a,b,c,d\}$, khi đó ta có

$$ab(b+c)+bc(c+d)+cd(d+a)+da(a+b) \le ab^2+b(c+d)^2+(c+d)a^2+ab(c+d)$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương

$$cd(b-a)+d^2(b-c)+a^2c \ge 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng do $b=\max\{a,b,c,d\}$. Như thế ta chỉ còn chứng minh với mọi $x, y, z \ge 0$ thỏa $x+y+z=3$ thì

$$xy^2+yz^2+zx^2+xyz \le 4$$

Không mất tính tổng quát giả sử y là số hạng nằm giữa x và z, khi đó ta có

$$x(y-z)(y-x) \le 0$$

Suy ra $xy^2+zx^2 \le xyz+x^2y$, do đó

$$xy^2+yz^2+zx^2+xyz \le y(x+z)^2 \le 4\left(\frac{y+(x+z)}{3}\right)^3 = 4$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c,d)=(1,2,0,0)$ và các hoán vị tương ứng.

♡♡♡

121 *Cho a, b, c là các số khôn âm thỏa $a^2+b^2+c^2=1$, chứng minh rằng*

$$\left[1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{c+a}{2}\right)^2\right] \ge \frac{8}{27}$$

Lời giải. Đặt $a+b+c=q, ab+bc+ca=q, abc=r$ khi đó ta có $p^2=2q+1, q \le 1$. Mặt khác, theo bất đẳng thức Schur $r \ge \frac{q(4q-p^2)}{9} = \frac{q(2q-1)}{9}$. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{19}{27} - \sum_{\text{cyc}} \frac{(a+b)^2}{4} + \sum_{\text{cyc}} \frac{(a+b)^2(a+c)^2}{16} - \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{64} \ge 0$$

Hay

$$\frac{460}{27} - 24q + 3q^2 - 2q^3 + 16pr + 2pqr - r^2 \ge 0$$

Dễ thấy đây là hàm đồng biến theo r nên

$$\begin{aligned} VT &\ge \frac{460}{27} - 24q + 3q^2 - 2q^3 + \frac{16p^2(4q-p^2)}{9} + \frac{2p^2q(4q-p^2)}{9} - \frac{p^2(4q-p^2)^2}{81} \\ &= \frac{1}{81}(1-q)(98q^2-725q+1235) \ge 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

♡♡♡

122 *Cho các số không âm a,b,c,d, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{cd}{c+d}+\frac{da}{d+a}\le\sqrt{(a+c)(b+d)}$$

Lời giải. Ta có bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}\right)\ge a+b+c+d-2\sqrt{(a+c)(b+d)}$$

Hay

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}\ge\frac{(a-b+c-d)^2}{\left(\sqrt{a+c}+\sqrt{b+d}\right)^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}+\frac{(c-d)^2}{2(c+d)}\ge\frac{(a-b+c-d)^2}{2(a+b+c+d)}\ge\frac{(a-b+c-d)^2}{2\left(\sqrt{a+c}+\sqrt{b+d}\right)^2}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{(b-c)^2}{2(b+c)}+\frac{(d-a)^2}{2(d+a)}\ge\frac{(a-b+c-d)^2}{2(a+b+c+d)}\ge\frac{(a-b+c-d)^2}{2\left(\sqrt{a+c}+\sqrt{b+d}\right)^2}$$

Cộng 2 bất đẳng thức trên lại vế với vế, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

♡♡♡

123 *Chứng minh rằng với mọi số dương a,b,c ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{c^2+b^2}{a^2+b^2}}+\sqrt{\frac{b^2+a^2}{c^2+a^2}}$$

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b}+\sum_{cyc}\frac{b}{a}\ge\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}+\sum_{cyc}\sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}$$

Thật vậy, để chứng minh bất đẳng thức trên, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}$$

Hay

$$c^2(a^2-b^2)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 0 \text{ (đúng)}$$

Trở lại bài toán của ta, giả sử bất đẳng thức đã cho không đúng, tức là tồn tại $a,b,c>0$ sao cho

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b}<\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}$$

Khi đó, theo trên,

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b}+\sum_{cyc}\frac{b}{a}\ge\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}+\sum_{cyc}\sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}$$

Từ đây và từ giả thiết phản chứng, ta suy ra được

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} > \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}$$

Mặt khác, bất đẳng thức $\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} < \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}$ tương đương với

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b}\right)^2 < \left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}\right)^2$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b^2} + 2\sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} < \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} + 2\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}$$

Từ đây, suy ra

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b^2} < \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}$$

Như vậy, để dẫn đến điều mâu thuẫn, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{u}{v} \ge \sum_{\text{cyc}} \frac{u+t}{v+t} \qquad \forall u, v, t > 0$$

Thật vậy, đặt $x = \frac{u}{v}, y = \frac{v}{t}, z = \frac{t}{u}$ thì ta có $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$. Khi đó, ta có

$$\frac{u+t}{v+t} = \frac{1+xy}{1+y} = x + \frac{1-x}{1+y}, \qquad \frac{t+v}{u+v} = z + \frac{1-z}{1+x}, \qquad \frac{v+u}{t+u} = y + \frac{1-y}{1+z}$$

Do đó bất đẳng thức tương đương

$$\frac{x-1}{y+1} + \frac{y-1}{z+1} + \frac{z-1}{x+1} \ge 0$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} (x-1)(z+1)(x+1) \ge 0$$

$$\sum_{\text{cyc}} xy^2 + \sum_{\text{cyc}} x^2 \ge \sum_{\text{cyc}} x + 3$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM và bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} xy^2 \ge 3xyz = 3, \qquad \sum_{\text{cyc}} x^2 \ge \sum_{\text{cyc}} x$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Ta có kết quả sau với mọi $a, b, c, x > 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \left(\frac{a^x + c^x}{b^x + c^x}\right)^{1/x} + \left(\frac{c^x + b^x}{a^x + b^x}\right)^{1/x} + \left(\frac{b^x + a^x}{c^x + a^x}\right)^{1/x}$$

Để chứng minh kết quả này, ta sử dụng một kết quả "rất đẹp" sau

Nếu a, b, c, x, y, z là các số dương thỏa mãn $abc = xyz$, $\max\{a, b, c\} \ge \max\{x, y, z\}$, $\min\{a, b, c\} \le \min\{x, y, z\}$ thì

$$a + b + c \ge x + y + z$$

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c, x \geq y \geq z$, suy ra $a \geq x, c \leq z$. Do $c \leq z$ nên $ab \geq xy$. Do đó, sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\begin{aligned} a+b+c-x-y-z &= (x-y)\left(\frac{a}{x}-1\right)+(y-z)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}-2\right)+z\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}-3\right) \\ &\geq (y-z)\left(2\sqrt{\frac{ab}{xy}}-2\right)+z\left(3\sqrt[3]{\frac{abc}{xyz}}-3\right) \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra

$$a+b+c \geq x+y+z$$

Từ kết quả này, với chú ý rằng

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a} = \left(\frac{a^x+c^x}{b^x+c^x}\right)^{1/x}\cdot\left(\frac{c^x+b^x}{a^x+b^x}\right)^{1/x}\cdot\left(\frac{b^x+a^x}{c^x+a^x}\right)^{1/x} = 1$$

$$\max\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\} \geq \max\left\{\left(\frac{a^x+c^x}{b^x+c^x}\right)^{1/x},\left(\frac{c^x+b^x}{a^x+b^x}\right)^{1/x},\left(\frac{b^x+a^x}{c^x+a^x}\right)^{1/x}\right\}$$

$$\min\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\} \leq \max\left\{\left(\frac{a^x+c^x}{b^x+c^x}\right)^{1/x},\left(\frac{c^x+b^x}{a^x+b^x}\right)^{1/x},\left(\frac{b^x+a^x}{c^x+a^x}\right)^{1/x}\right\}$$

Ta đi đến kết quả như trên.

♡♡♡

124 *Cho các số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=5$, chứng minh bất đẳng thức*

$$16(a^3b+b^3c+c^3a)+640 \geq 11(ab^3+bc^3+ca^3)$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét trường hợp $a \leq b \leq c$ là đủ. Khi đó, bất đẳng thức tương đương

$$f(a) = 16(a^3b+b^3c+c^3a)+\frac{128}{125}(a+b+c)^4-11(ab^3+bc^3+ca^3) \geq 0$$

Ta có

$$f'(a) = 16(3a^2b+c^3)+\frac{512}{125}(a+b+c)^3-11(b^3+3a^2c) = g(c)$$

Lại có

$$g'(c) = 48c^2+\frac{1536}{125}(a+b+c)^2-33a^2 \geq 0$$

Suy ra $g(c)$ là hàm đồng biến. Do đó,

$$f'(a) = g(c) \geq g(b) = 5b^3+15a^2b+\frac{128}{125}(a+2b)^3 \geq 0$$

Do đó $f(a)$ là hàm đồng biến. Vậy,

$$f(a) \geq f(0) = \frac{1}{125}(4b-c)^2(8b^2+16bc+128c^2) \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0, b=1, c=4$, và các hoán vị tương ứng.

♡♡♡

125 *Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a+b+c}\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Lời giải. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab+bc+ca}{b+c} \ge \sum_{\text{cyc}} a + \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{bc}{b+c} \ge \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{bc}{b+c} \ge \frac{(ab+bc+ca)^2}{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$2\left(\sum_{\text{cyc}} a^2\right)\left(\sum_{\text{cyc}} bc\right) \ge \left(\sum_{\text{cyc}} a\right)\left(\sum_{\text{cyc}} bc(b+c)\right)$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} ab(a^2+b^2) \ge 2\sum_{\text{cyc}} a^2b^2$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM–GM.

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) \sim (1,1,1)$ hoặc $(a,b,c) \sim (1,1,0)$.

♡♡♡

126 *Chứng minh rằng với mọi số không âm a,b,c,d ta có*

$$\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^3+c^3}+\frac{1}{a^3+d^3}+\frac{1}{b^3+c^3}+\frac{1}{b^3+d^3}+\frac{1}{c^3+d^3} \ge \frac{243}{2(a+b+c+d)^3}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c \ge d \ge 0$. Khi đó, ta có

$$a^3+b^3 \le \left(a+\frac{d}{3}\right)^3 + \left(b+\frac{d}{3}\right)^3$$

Suy ra

$$\frac{1}{a^3+b^3} \ge \frac{1}{\left(a+\frac{d}{3}\right)^3+\left(b+\frac{d}{3}\right)^3}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{1}{a^3+c^3} \ge \frac{1}{\left(a+\frac{d}{3}\right)^3+\left(c+\frac{d}{3}\right)^3}, \qquad \frac{1}{b^3+c^3} \ge \frac{1}{\left(b+\frac{d}{3}\right)^3+\left(c+\frac{d}{3}\right)^3}$$

Mặt khác, dễ thấy

$$\left(a+\frac{d}{3}\right)^3 \ge a^3+d^3$$

Suy ra

$$\frac{1}{a^3+d^3} \ge \frac{1}{\left(a+\frac{d}{3}\right)^3}$$

Tương tự

$$\frac{1}{b^3+d^3} \ge \frac{1}{\left(b+\frac{d}{3}\right)^3}, \qquad \frac{1}{c^3+d^3} \ge \frac{1}{\left(c+\frac{d}{3}\right)^3}$$

Do đó
$$VT \geq \sum_{cyc} \frac{1}{x^3} + \sum_{cyc} \frac{1}{x^3+y^3}$$
trong đó $x = a + \frac{d}{3}, y = b + \frac{d}{3}, z = c + \frac{d}{3}$.
Ta cần chứng minh
$$\sum_{cyc} \frac{1}{x^3} + \sum_{cyc} \frac{1}{x^3+y^3} \geq \frac{243}{2(x+y+z)^3}$$
Hay
$$\sum_{cyc} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{2}{x^3+y^3} \right) \geq \frac{243}{(x+y+z)^3}$$
Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có
$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{2}{x^3+y^3} \geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{x^3y^3(x^3+y^3)}} = 3\sqrt[3]{\frac{2}{^3y^3(x^2-xy+y^2)(x+y)}}$$
$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{\left(\frac{3xy+(x^2-xy+y^2)}{4}\right)^4(x+y)}} = \frac{24}{(x+y)^3}$$
Tương tự
$$\frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} + \frac{2}{y^3+z^3} \geq \frac{24}{(y+z)^3}, \qquad \frac{1}{z^3} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{z^3+x^3} \geq \frac{24}{(z+x)^3}$$
Suy ra
$$\sum_{cyc} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{2}{x^3+y^3} \right) \geq 24\sum_{cyc} \frac{1}{(x+y)^3} \geq \frac{84}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$
$$\geq \frac{243}{(x+y+z)^3}$$
Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c,d) \sim (1,1,1,0)$.

♡♡♡

127 *Chứng minh rằng với mọi số không âm a, b, c, d ta có*
$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{b^2+c^2+d^2} + \frac{1}{c^2+d^2+a^2} + \frac{1}{d^2+a^2+b^2} \geq \frac{12}{(a+b+c+d)^2}$$
Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Khi đó, ta có
$$\left(a + \frac{c+d}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c+d}{2}\right)^2 - (a^2+b^2+c^2) = \frac{(2(a+b)+c+d)(c+d)}{2} - c^2 \geq 0$$
Suy ra
$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{1}{\left(a+\frac{c+d}{2}\right)^2 + \left(b+\frac{c+d}{2}\right)^2}$$
Tương tự, ta có
$$\frac{1}{d^2+a^2+b^2} \geq \frac{1}{\left(a+\frac{c+d}{2}\right)^2 + \left(b+\frac{c+d}{2}\right)^2}$$
Lại có
$$\left(a + \frac{c+d}{2}\right)^2 - (c^2+d^2+a^2) = a(c+d) - c^2 - d^2 + \frac{(c+d)^2}{4} \geq 0$$

Suy ra

$$\frac{1}{c^2+d^2+a^2} \ge \frac{1}{\left(a+\frac{c+d}{2}\right)^2}$$

Tương tự

$$\frac{1}{d^2+a^2+b^2} \ge \frac{1}{\left(b+\frac{c+d}{2}\right)^2}$$

Do đó

$$VT \ge \frac{1}{\left(a+\frac{c+d}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(b+\frac{c+d}{2}\right)^2} + \frac{2}{\left(a+\frac{c+d}{2}\right)^2 + \left(b+\frac{c+d}{2}\right)^2}$$

Đặt $u = a + \frac{c+d}{2}, v = b + \frac{c+d}{2}$ thì ta có $u, v \ge 0$. Ta cần chứng minh

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{2}{u^2+v^2} \ge \frac{12}{(u+v)^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM và bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{2}{u^2+v^2} &\ge \frac{2}{u^2+v^2} + \frac{2}{uv} = 2\left(\frac{1}{u^2+v^2} + \frac{1}{2uv}\right) + \frac{1}{uv} \\ &\ge \frac{8}{u^2+v^2+2uv} + \frac{4}{(u+v)^2} = \frac{12}{(u+v)^2}\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c, d) \sim (1, 1, 0, 0)$.

Nhận xét. Bằng cách làm hoàn toàn tương tự, bạn hãy giải bài toán sau: Tìm giá trị nhỏ nhất nhất của biểu thức

$$P(a, b, c, d) = \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$$

với $a, b, c, d \ge 0, a + b + c + d = 2, n \ge \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}$.

♡♡♡

128 *Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \le \sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)}$$

Lời giải. Bình phương hai vế của bất đẳng thức trên, ta được bất đẳng thức tương đương

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}\right)^2 \le \left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{a}\right)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{c(a+b)}{c^2+ab} + 2\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ac)}} \le 3 + \sum_{\text{cyc}} \frac{a+b}{\sqrt{ab}}$$

Ta có

$$(a^2+bc)(b^2+ac) - ab(a+c)(b+c) = c(a-b)^2(a+b) \ge 0$$

Suy ra

$$\sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ac)}} \le 1$$

Và như thế

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ac)}} \le 3$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{a+b}{\sqrt{ab}} \ge \sum_{cyc} \frac{c(a+b)}{c^2+ab} + 3$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \frac{a+b}{\sqrt{ab}} - \sum_{cyc} \frac{c(a+b)}{c^2+ab} - 3 &= \sum_{cyc} \left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}} - \frac{c(a+b)}{c^2+ab} - 1 \right) \\ &\ge \sum_{cyc} \left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}} - \frac{c(a+b)}{2\sqrt{abc^2}} - 1 \right) \\ &= \sum_{cyc} \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2\sqrt{ab}} \ge 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

♡♡♡

129 *Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c thì*

$$\frac{a^2-bc}{\sqrt{a^2+2b^2+3c^2}} + \frac{b^2-ca}{\sqrt{b^2+2c^2+3a^2}} + \frac{c^2-ab}{\sqrt{c^2+2a^2+3b^2}} \ge 0$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \frac{8(a^2-bc)}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}} &= \sum_{cyc} \left(\frac{8(a^2-bc)}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}} + b + c \right) - 2\sum_{cyc} a \\ &= \sum_{cyc} \frac{8(a^2-bc)+(b+c)\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}} - 2\sum_{cyc} a \\ &\ge \sum_{cyc} \frac{8(a^2-bc)+(b+c)(a+2b+3c)}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}} - 2\sum_{cyc} a \\ &= \sum_{cyc} \frac{8a^2+ab+bc+ca+c^2}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}} + 2\sum_{cyc} \frac{(b-c)^2}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}} - 2\sum_{cyc} a\end{aligned}$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{8a^2+ab+bc+ca+c^2}{\sqrt{a^2+2b^2+3c^2}} \ge 2\sqrt{6}\sum_{cyc} a$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta được

$$\begin{aligned}&VT^2 \left(11 \left(\sum_{cyc} a^2 \right)^2 + 21\sum_{cyc} a^2b^2 + 6 \left(\sum_{cyc} a^2 \right) \left(\sum_{cyc} ab \right) \right) \\ &= VT^2 \left(\sum_{cyc} (8a^2+ab+bc+ca+c^2)(a^2+2b^2+3c^2) \right) \\ &\ge \left(\sum_{cyc} (8a^2+ab+bc+ca+c^2) \right)^3 \\ &= 27 \left(3\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \right)^3\end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$9\left(3\sum_{\text{cyc}} a^2+\sum_{\text{cyc}} ab\right)^3 \ge 8\left(\sum_{\text{cyc}} a\right)^2\left(11\left(\sum_{\text{cyc}} a^2\right)^2+21\sum_{\text{cyc}} a^2b^2+6\left(\sum_{\text{cyc}} a^2\right)\left(\sum_{\text{cyc}} ab\right)\right)$$

Do đây là một bất đẳng thức đồng bậc với a, b, c nên không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$. Đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$ thì ta có $\frac{1}{3}\ge q\ge 9r\ge 0$. Ngoài ra, sử dụng bất đẳng thức Schur, ta được $r\ge \frac{4q-1}{9}$. Bất đẳng thức trên trở thành

$$9(3-5q)^3 \ge 8(11(1-2q)^2+21(q^2-2r)+6q(1-2q))$$

Hay

$$-1125q^3+1601q^2-911q+336r+155\ge 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì

$$\begin{aligned}-1125q^3+1601q^2-911q+336r+155 &\ge -1125q^3+1601q^2-911q+336\cdot\frac{4q-1}{9}+155\\ &= \frac{1}{3}(1-3q)(1125q^2-1226q+353)\ge 0\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

130 *Cho các số dương a, b, c thỏa $a+b+c=1$, chứng minh bất đẳng thức*

$$\left(\frac{1}{a}-2\right)^2+\left(\frac{1}{b}-2\right)^2+\left(\frac{1}{c}-2\right)^2 \ge \frac{8(a^2+b^2+c^2)^2}{(1-a)(1-b)(1-c)}$$

Lời giải. Đặt $x=a^2+b^2+c^2$ thì dễ thấy $1\ge x\ge \frac{1}{3}$, do đó $(x-1)(3x-1)\le 0$, suy ra $4x-1\ge 3x^2$. Ta lại có

$$\sum_{\text{cyc}} a^2b^2 \ge abc\sum_{\text{cyc}} a = abc$$

Do đó

$$(4x-1)\left(\sum_{\text{cyc}} a^2b^2\right)\ge 3abcx^2$$

Mặt khác, ta lại có

$$4x-1=\sum_{\text{cyc}}(b+c-a)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev, ta được

$$3\sum_{\text{cyc}} b^2c^2(b+c-a)^2 \ge \left(\sum_{\text{cyc}}(b+c-a)^2\right)\left(\sum_{\text{cyc}} b^2c^2\right)$$

Do đó

$$\sum_{\text{cyc}} b^2c^2(b+c-a)^2\ge abcx^2$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} b^2c^2(1-2a)^2\ge abcx^2$$

$$\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{1}{a}-2\right)^2\ge \frac{x^2}{abc}$$

Theo bất đẳng thức AM–GM thì

$$(1-a)(1-b)(1-c) = (a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$$

Do đó

$$\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{1}{a} - 2\right)^2 \ge \frac{x^2}{abc} \ge \frac{8x^2}{(1-a)(1-b)(1-c)} = \frac{8\left(\sum_{\text{cyc}} a^2\right)^2}{(1-a)(1-b)(1-c)}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

♡♡♡

131 *Cho các số không âm a, b, c, d thỏa $a + b + c + d = 1$, chứng minh bất đẳng thức*

$$\left|a^4 - b^4 + c^4 - d^4 - 2a^2c^2 + 2b^2d^2 + 4ab^2c + 4cd^2a - 4bc^2d - 4da^2b\right| \le 1$$

Lời giải. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\left|\left(a^2 - c^2\right)^2 - \left(b^2 - d^2\right)^2 + 4ac(b-d)^2 - 4bd(a-c)^2\right| \le 1$$

Hay

$$-1 \le f(a, b, c, d) \le 1$$

trong đó $f(a, b, c, d) = \left(a^2 - c^2\right)^2 - \left(b^2 - d^2\right)^2 + 4ac(b-d)^2 - 4bd(a-c)^2$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a + c \le b + d$ thì ta có $1 \ge b + d \ge \frac{1}{2} \ge a + c \ge 0$. Khi đó, ta có

$$f(a, b, c, d) - f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right) = (a-c)^2((a+c)^2 - (b+d)^2) \le 0$$

Hay

$$f(a, b, c, d) \le f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right) = (b-d)^2((a+c)^2 - (b+d)^2) \le 0$$

Tương tự, ta có

$$f(a, b, c, d) - f(a+c, b, 0, d) = 4ac((b+d)^2 - (a+c)^2) \ge 0$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) \ge f(a+c, b, 0, d) &= (a+c)^4 - (b^2 - d^2)^2 - 4bd(a+c)^2 \\ &= (1-S)^4 - S^2(S^2 - 4P) - 4P(1-S)^2 \\ &= 4S^2(1-S) + 2(S-1)^2 + 4P(2S-1) - 1 \ge -1 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c, d) = (1, 0, 0, 0)$.

♡♡♡

132 *Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{ab(a^2 + bc)}{b+c} + \frac{bc(b^2 + ca)}{c+a} + \frac{ca(c^2 + ab)}{a+b} \ge \sqrt{3abc(ab^2 + bc^2 + ca^2)}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta được

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{ab(a^2 + bc)}{b+c}\right)^2 &\ge 3\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{ab(a^2 + bc)}{b+c} \cdot \frac{bc(b^2 + ca)}{c+a}\right) \\ &= 3abc\sum_{\text{cyc}} \frac{b(a^2 + bc)(b^2 + ca)}{(a+c)(b+c)} \end{aligned}$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{b(a^2+bc)(b^2+ca)}{(a+c)(b+c)} \ge ab^2+bc^2+ca^2$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{b(a^2+bc)(b^2+ca)}{(a+c)(b+c)} - ab^2 \right) \ge 0$$

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{bc(a-b)^2(a+b)}{(a+c)(b+c)} \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

133 *Tìm hằng số a nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau*

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^a \left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^{\frac{3-a}{2}} \ge \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}$$

đúng với mọi số thực dương x, y, z.

Lời giải. Cho $x=y=1, z \to 0$, ta suy ra được $a \ge \frac{3\ln 3 - 4\ln 2}{2\ln 2 - \ln 3} = a_0 \simeq 1.81884...$ Ta sẽ chứng minh đây là giá trị cần tìm, tức là chứng minh

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{a_0} \left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^{\frac{3-a_0}{2}} \ge \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}$$

Vì đây là một bất đẳng thức đồng bậc với x, y, z nên ta có thể chuẩn hóa cho $x+y+z=1$. Đặt $q = ab+bc+ca, r = abc$ thì $\frac{1}{3} \ge q \ge 9r \ge 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$r + \frac{8q^{\frac{3-a_0}{2}}}{3^{\frac{3+a_0}{2}}} - q \ge 0$$

Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $1 \ge 4q \ge 0$, khi đó

$$\begin{aligned} r + \frac{8q^{\frac{3-a_0}{2}}}{3^{\frac{3+a_0}{2}}} - q &\ge \frac{8q^{\frac{3-a_0}{2}}}{3^{\frac{3+a_0}{2}}} - q = q^{\frac{3-a_0}{2}} \left(\frac{8}{3^{\frac{3+a_0}{2}}} - q^{\frac{a_0-1}{2}} \right) \\ &\ge q^{\frac{3-a_0}{2}} \left(\frac{8}{3^{\frac{3+a_0}{2}}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{a_0-1}{2}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Trường hợp 2. $\frac{1}{3} \ge q \ge \frac{1}{4}$, khi đó, áp dụng bất đẳng thức Schur, ta có $r \ge \frac{4q-1}{9} \ge 0$. Do đó

$$r + \frac{8q^{\frac{3-a_0}{2}}}{3^{\frac{3+a_0}{2}}} - q \ge \frac{4q-1}{9} + \frac{8q^{\frac{3-a_0}{2}}}{3^{\frac{3+a_0}{2}}} - q = \frac{8q^{\frac{3-a_0}{2}}}{3^{\frac{3+a_0}{2}}} - \frac{5q+1}{9} = f(q)$$

Ta có

$$f'(q) = \frac{4(3-a_0)}{q^{\frac{a_0-1}{2}}.3^{\frac{a_0+3}{2}}} - \frac{5}{9}$$

Dễ dàng kiểm tra được $f'(q)$ là hàm đồng biến, lại có $f'\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ và $f'\left(\frac{1}{4}\right) > 0$, do đó tồn tại duy nhất $q_0 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ sao cho $f'(q_0) = 0$. Từ đây, ta dễ dàng kiểm tra được

$$f(q) \ge \min\left\{ f\left(\frac{1}{4}\right), f\left(\frac{1}{3}\right) \right\}$$

Nhưng $f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$. Do đó

$$f(q) \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn. Vậy

$$a_{\min} = \frac{3\ln 3 - 4\ln 2}{2\ln 2 - \ln 3}.$$

♡♡♡

134 *Cho các số không âm a, b, c thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, chứng minh bất đẳng thức*

$$1 \leq \frac{a}{\sqrt{1+bc}} + \frac{b}{\sqrt{1+ca}} + \frac{c}{\sqrt{1+ab}} \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{1+bc}} \geq 1$$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức AM–GM và bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{1+bc}} = \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{a\sqrt{1+bc}} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{2a^2}{1+a^2+bc} \geq \frac{2(a+b+c)^2}{2+ab+bc+ca}$$
$$\geq \frac{2(a+b+c)^2}{2+4(ab+bc+ca)} = 1$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{1+bc}} \leq \frac{3}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{1+bc}}\right)^2 \leq \left(\sum_{\text{cyc}} a\right)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{1+bc}\right)$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{1+bc} \leq \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{(a+b)(a+c)}$$

Thật vậy, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{(a+b)(a+c)} - \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{1+bc} = \sum_{\text{cyc}} \frac{a(b^2+c^2-ab-ac)}{(1+bc)(a+b)(a+c)}$$
$$= \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{ca(c-a)}{(1+bc)(a+b)(a+c)} - \frac{ab(a-b)}{(1+bc)(a+b)(a+c)}\right)$$
$$= \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{ab(a-b)}{(1+ca)(b+c)(b+a)} - \frac{ab(a-b)}{(1+bc)(a+b)(a+c)}\right)$$
$$= \sum_{\text{cyc}} \frac{ab(a-b)^2(a^2+b^2)}{(1+ac)(1+bc)(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0$$

Như thế, ta được

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{1+bc}}\right)^2 \leq \left(\sum_{\text{cyc}} a\right)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{(a+b)(a+c)}\right) = \frac{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{9}{4}$$

Suy ra

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{1+bc}} \le \frac{3}{2}$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn. Đẳng thức ở vế trái xảy ra khi và chỉ khi$(a,b,c) = (1,0,0)$, đẳng thức ở vế phải xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

♡♡♡

135 *Cho a,b,c là các số không âm, chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}} \ge \sqrt{2+2\sqrt{1+4\sqrt{\frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}}}$$

Lời giải. Ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} - 2 = \frac{\sum_{\text{cyc}} ab(a-b)^2(a^2+b^2+2c^2) + 8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \ge 0$$

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} \cdot \frac{b(c+a)}{c^2+a^2} - 1 = \frac{2abc((a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - abc)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \ge 0$$

Suy ra,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} \ge 2$$

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} \cdot \frac{b(c+a)}{c^2+a^2} \ge 1$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}}, y = \sqrt{\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}}, z = \sqrt{\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}}$, thì ta có $x,y,z \ge 0$ và theo trên, ta được

$$x^2+y^2+z^2 \ge 2$$

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \ge 1$$

Do đó

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\\ &\ge 2+2(xy+yz+zx)\\ &= 2+2\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)}\\ &\ge 2+2\sqrt{1+2xyz(x+y+z)}\end{aligned}$$

Suy ra

$$(x+y+z)^2 \ge 2+2\sqrt{1+2xyz(x+y+z)}$$

Chú ý rằng $x,y,z \ge 0$ nên từ đây, ta có

$$(x+y+z)^2 \ge 4$$

Hay

$$x+y+z \ge 2$$

Và như thế, ta được

$$(x+y+z)^2 \ge 2+2\sqrt{1+4xyz}$$

Hay

$$x+y+z \ge \sqrt{2+2\sqrt{1+4xyz}}$$

Đây chính là bất đẳng thức đã cho, vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) \sim (1,1,0)$.

♡♡♡

136 *Cho a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng*

$$\frac{a^2-ab+b^2}{a+b}+\frac{b^2-bc+c^2}{b+c}+\frac{c^2-ca+a^2}{c+a}\ge\frac{3}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}$$

Lời giải. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{4(a^2-ab+b^2)}{a+b}\ge\frac{6(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{4(a^2-ab+b^2)}{a+b}-(a+b)\right)\ge\frac{6(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}-2(a+b+c)$$

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{3(a-b)^2}{a+b}\ge\frac{2\left(\sum_{\text{cyc}}(a-b)^2(a+b)\right)}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\sum_{\text{cyc}}S_a(b-c)^2\ge 0$$

trong đó

$$S_a=\frac{3a^2+b^2+c^2-4bc}{b+c},\qquad S_b=\frac{a^2+3b^2+c^2-4ca}{c+a},\qquad S_c=\frac{a^2+b^2+3c^2-4ab}{a+b}$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a\ge b\ge c$, khi đó ta dễ dàng kiểm tra được $S_a, S_b\ge 0$. Ta có

$$\begin{aligned}S_b+S_c&=\frac{a^2+3b^2+c^2-4ca}{c+a}+\frac{a^2+b^2+3c^2-4ab}{a+b}\\&\ge\frac{a^2+3b^2+c^2-4ca}{a+b}+\frac{a^2+b^2+3c^2-4ab}{a+b}=\frac{2(a-b-c)^2}{a+b}\ge 0\end{aligned}$$

Do $a\ge b\ge c$ nên $(c-a)^2\ge(a-b)^2\ge 0$. Do đó

$$\sum_{\text{cyc}}S_a(b-c)^2\ge S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge(S_b+S_c)(a-b)^2\ge 0$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)\sim(1,1,1)$ hoặc $(a,b,c)\sim(2,1,1)$.

♡♡♡

137 *Chứng minh rằng với mọi số dương $a, b, c>0$ thỏa $abc=1$, ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}\ge 1$$

Lời giải. Đặt $x=\frac{1-a}{1+a}, y=\frac{1-b}{1+b}, z=\frac{1-c}{1+c}$, khi đó ta có $x, y, z\in[-1,1]$ và

$$(1-x)(1-y)(1-z)=(1+x)(1+y)(1+z)$$

Suy ra

$$x+y+z+xyz=0$$

Đặt $q=ab+bc+ca$ và $r=abc$ ta được $|r|\le 1$. Ta có

$$x^2y^2z^2=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2q$$

Do đó
$$2q = x^2(y^2z^2-1) - y^2 - z^2 \le 0$$
Mặt khác
$$\begin{aligned}2q &= x^2(y^2z^2-1) - y^2 - z^2 \ge (y^2z^2-1) - y^2 - z^2\\ &= y^2(z^2-1) - z^2 - 1 \ge (z^2-1) - z^2 - 1 = -2\end{aligned}$$
Như vậy, ta được $0 \ge q \ge -1$. Trở lại bài toán của ta, bất đẳng thức tương đương với
$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 + \frac{4}{1 + \frac{1-x}{1+x} + \frac{1-y}{1+y} + \frac{1-z}{1+z}} \ge 4$$
Hay
$$r^2 - 2r - 2q + \frac{1+q}{1-r} \ge 1$$
$$f(r) = -r^3 + 3r^2 - r + q(2r-1) \ge 0$$
Xét 3 trường hợp

Trường hợp 1. Nếu $r \ge \frac{1}{2}$ thì
$$f(r) = -r^3 + 3r^2 - r + q(2r-1) \ge -r^3 + 3r^2 - r - (2r-1) = (1-r)^3 \ge 0$$
Trường hợp 2. Nếu $r \le 0$ thì
$$f(r) = -r^3 + 3r^2 - r + q(2r-1) \ge -r^3 + 3r^2 - r = -r(r^2 - 3r + 1) \ge 0$$
Trường hợp 3. Nếu $\frac{1}{2} \ge r \ge 0$, khi đó sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có
$$\begin{aligned}q^2 &= x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x+y+z)\\ &= x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 2x^2y^2z^2\\ &\ge 3\sqrt[3]{x^4y^4z^4} - 2x^2y^2z^2 \ge x^2y^2z^2 = r^2\end{aligned}$$
Suy ra $|q| \ge |r|$ hay $q \le -r$. Do đó
$$\begin{aligned}f(r) = -r^3 + 3r^2 - r + q(2r-1) &\ge -r^3 + 3r^2 - r - r(2r-1)\\ &= r^2(1-r) \ge 0\end{aligned}$$
Như vậy, trong mọi trường hợp, ta luôn có $f(r) \ge 0$. Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b \to +\infty, c \to 0^+$ và các hoán vị tương ứng.

♡♡♡

138 *Cho các số dương x, y, x thỏa $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng*
$$\sqrt{x^2+xyz} + \sqrt{y^2+xyz} + \sqrt{z^2+xyz} \ge \sqrt{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx+2\sqrt{3xyz}}$$
Lời giải. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$\left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{x^2+xyz}\right)^2 \ge \sum_{\text{cyc}} x^2 + \sum_{\text{cyc}} xy + 2\sqrt{3xyz}$$
Hay
$$2\sum_{\text{cyc}} \sqrt{xy(x+yz)(y+zx)} \ge \sum_{\text{cyc}} xy - 3xyz + 2\sqrt{3xyz}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
2\sqrt{xy(x+yz)(y+zx)} &= 2\sqrt{xy(x(x+y+z)+yz)(y(x+y+z)+zx)} \\
&= 2(x+y)\sqrt{xy(x+z)(y+z)} \\
&= 2(x+y)\sqrt{x^2y^2+xyz} \ge (x+y)\left(xy+\sqrt{3xyz}\right) \\
&= xy - xyz + (x+y)\sqrt{3xyz}
\end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$2\sqrt{yz(y+zx)(z+xy)} \ge yz - xyz + (y+z)\sqrt{3xyz}$$
$$2\sqrt{zx(z+xy)(x+yz)} \ge zx - xyz + (z+x)\sqrt{3xyz}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
2\sum_{\text{cyc}}\sqrt{xy(x+yz)(y+zx)} &\ge \sum_{\text{cyc}}\left(xy - xyz + (x+y)\sqrt{3xyz}\right) \\
&= \sum_{\text{cyc}} xy - 3xyz + 2\sqrt{3xyz}
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

♡♡♡

139 *Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số không âm thỏa $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ thì*

$$\frac{9}{\sqrt[3]{18}} \ge \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{z+x}{2}\right)^2}} \ge 1 + \frac{4}{\sqrt[3]{6}}$$

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{z+x}{2}\right)^2}} \ge 1 + \frac{4}{\sqrt[3]{6}}$$

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $x \ge y \ge z \ge 0$, khi đó

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2}} \ge 1, \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{x+z}{2}\right)^2}} \ge \frac{4}{\sqrt[3]{4\left(2-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x+z}{2}\right)^2\right)}}$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$2\left(2-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x+z}{2}\right)^2\right) \le 3$$

Hay

$$2 \le (x+y)^2 + (x+z)^2$$
$$2xy + 2xz \ge y^2 + z^2 \text{ (đúng)}$$

Ta còn phải chứng minh

$$\frac{9}{\sqrt[3]{18}} \ge \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{z+x}{2}\right)^2}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{1}{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} \le \frac{9}{2}$$

Hay

$$\sum_{cyc} \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} \le \frac{3}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} &\le \frac{2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}{2-(x^2+y^2)} = \frac{(x+y)^2}{2((x^2+z^2)+(y^2+z^2))}\\ &\le \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{y^2}{y^2+z^2}\right)\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sum_{cyc} \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} \le \frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{y^2}{y^2+z^2}\right) = \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức ở vế trái xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$, đẳng thức ở vế phải xảy ra khi và chỉ khi $(x,y,z)=(1,0,0)$.

♡♡♡

140 *Chứng minh rằng với mọi số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=1$,*

$$\frac{a}{\sqrt{4a+5b^2}}+\frac{b}{\sqrt{4b+5c^2}}+\frac{c}{\sqrt{4c+5a^2}} \le \frac{3}{\sqrt{17}}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{4a+5b^2}}\right)^2 \le \left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{4a+5b^2}\right) = \sum_{cyc}\frac{a}{4a+5b^2}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{a}{4a+5b^2} \le \frac{9}{17}$$

Hay

$$\sum_{cyc}\frac{b^2}{4a(a+b+c)+5b^2} \ge \frac{3}{17}$$

Lại sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta được

$$\sum_{cyc}\frac{b^2}{4a(a+b+c)+5b^2} \ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum_{cyc} b^2(4a(a+b+c)+5b^2)}$$

Ta cần chứng minh

$$17(a^2+b^2+c^2)^2 \ge 3\sum_{cyc} b^2(4a(a+b+c)+5b^2)$$

Hay

$$17(a^2+b^2+c^2)^2 \ge 15\sum_{cyc}a^4+12\sum_{cyc}a^2b^2+12\sum_{cyc}ab^3+12\sum_{cyc}a^2bc$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} a^4 + 11\sum_{\text{cyc}} a^2b^2 \ge 6\sum_{\text{cyc}} ab^3 + 6\sum_{\text{cyc}} a^2bc$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}}(a^2 - b^2 + 2ab + 2bc - 4ca)^2 \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

♡♡♡

141 *Tìm hằng số $k = k(n)$ lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \ge k(n)(a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n)$$

Lời giải. Cho $a_1 = 1, a_2 = \frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}}{\sin\frac{\pi}{n+1}}, \ldots, a_n = \frac{\sin\frac{n\pi}{n+1}}{\sin\frac{\pi}{n+1}}$, ta được $k(n) \le \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}}$. Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}}$ là giá trị cần tìm, tức là

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \ge \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}}(a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n)$$

Nhưng điều này là hiển nhiên vì

$$2\cos\frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1} a_ka_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin\frac{k\pi}{n+1}}{\sin\frac{(k+1)\pi}{n+1}}\left(\frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{n+1}}{\sin\frac{k\pi}{n+1}}a_k - a_{k+1}\right)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Vậy

$$k(n) = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}}.$$

♡♡♡

142 *Với mọi số dương a, b, c, ta có*

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c+a}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{a+b}} \ge \sqrt[3]{9(a+b+c)}$$

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}}\sqrt[3]{\frac{2(a^2+bc)}{b+c}} \ge \sum_{\text{cyc}}\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} M_a(a-b)(a-c) \ge 0$$

trong đó

$$M_a = \frac{1}{\sqrt[3]{b+c}\left(\sqrt[3]{4(a^2+bc)^2} + \sqrt[3]{2(a^2+bc)(a+b)(a+c)} + \sqrt[3]{(a+b)^2(a+c)^2}\right)}$$

$$M_b = \frac{1}{\sqrt[3]{c+a}\left(\sqrt[3]{4(b^2+ca)^2} + \sqrt[3]{2(b^2+ca)(b+c)(b+a)} + \sqrt[3]{(b+c)^2(b+a)^2}\right)}$$

$$M_c = \frac{1}{\sqrt[3]{a+b}\left(\sqrt[3]{4(c^2+ab)^2} + \sqrt[3]{2(c^2+ab)(c+a)(c+b)} + \sqrt[3]{(c+a)^2(c+b)^2}\right)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c > 0$, khi đó ta có

$$a(a^2+bc) \ge b(b^2+ca), \qquad a(b+c) \ge b(c+a), \qquad a-c \ge \frac{a(b-c)}{b}$$

Như thế, ta được $aM_a \ge bM_b$, do đó

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cyc}} M_a(a-b)(a-c) &\ge M_a(a-b)(a-c) + M_b(b-c)(b-a)\\ &\ge \frac{aM_a(a-b)(b-c)}{b} + M_b(b-c)(b-a)\\ &= \frac{(a-b)(b-c)(aM_a-bM_b)}{b} \ge 0\end{aligned}$$

Từ đây, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau với x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \ge \sqrt[3]{9(x^3+y^3+z^3)}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} S_z(x-y)^2 \ge 0$$

với

$$S_x = \frac{x^3(y^2+yz+z^2)^2}{2y^3z^3} + \frac{3x^3}{yz} - x - y - z$$

$$S_y = \frac{y^3(z^2+zx+x^2)^2}{2z^3x^3} + \frac{3y^3}{zx} - x - y - z$$

$$S_z = \frac{z^3(x^2+xy+y^2)^2}{2x^3y^3} + \frac{3z^3}{xy} - x - y - z$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \ge y \ge z$, khi đó ta dễ thấy $S_x \ge S_y \ge S_z$. Mặt khác, đặt $t = \frac{y+z}{2} \ge \frac{x}{2}$, ta có

$$\begin{aligned}S_y + S_z &\ge \frac{3y^3(z^2+zx+x^2)}{2z^2x^2} + \frac{3z^3(x^2+xy+y^2)}{2x^2y^2} + \frac{3(y^4+z^4)}{xyz} - 2(x+2t)\\ &= \frac{3(y^3+z^3)}{2x^2} + \frac{9(y^4+z^4)}{2xyz} + \frac{3(y^5+z^5)}{2y^2z^2} - 2(x+2t)\\ &\ge \frac{3t^3}{x^2} + \frac{9t^2}{x} + 3t - 2(x+2t) = \frac{3t^3+9t^2x-tx^2-2x^3}{x^2}\\ &\ge \frac{3\left(\frac{x}{2}\right)^3 + 9x\left(\frac{x}{2}\right)^2 - x^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2x^3}{x^2} = \frac{x}{8} > 0\end{aligned}$$

Do đó $S_x \ge S_y \ge 0$. Từ đây ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

♡♡♡

143 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\left(a+\frac{b^2}{c}\right)^2 + \left(b+\frac{c^2}{a}\right)^2 + \left(c+\frac{a^2}{b}\right)^2 \ge \frac{12(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c}$$

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{\text{cyc}} a^2 + 2\sum_{\text{cyc}} \frac{ab^2}{c} + \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{b^2} \ge \frac{12(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c}$$

Sử dụng kết quả bài toán **35**, ta có

$$2\sum_{\text{cyc}} \frac{ab^2}{c} \ge \frac{15(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{ab+bc+ca} - 3\sum_{\text{cyc}} ab, \qquad \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{b^2} \ge \frac{15(a^4+b^4+c^4)}{2(a^2+b^2+c^2)} - \frac{3}{2}\sum_{\text{cyc}} a^2$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{b^2} \ge \frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

Suy ra

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{b^2} \ge \frac{15(a^4+b^4+c^4)}{4(a^2+b^2+c^2)} - \frac{3}{4}\sum_{\text{cyc}} a^2 + \frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{15(a^4+b^4+c^4)}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2(a^3+b^3+c^3)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} + \frac{60(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{ab+bc+ca} + \sum_{\text{cyc}} a^2 - 12\sum_{\text{cyc}} ab \ge \frac{48(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$, đặt $ab+bc+ca = \frac{1-q^2}{3}, r = abc$ $(1 \ge q \ge 0)$ thì ta có $\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27} \ge r \ge \max\left\{0, \frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}\right\}$, bất đẳng thức trở thành

$$(37+117q^2-34q^4)r^2 - \frac{2}{27}(1-q^2)(24q^6-304q^4+65q^2+44)r + \frac{(q^2-1)(175q^8-418q^6+159q^4+20q^2-17)}{243} \ge 0$$

Chú ý rằng $(q^2-1)(175q^8-418q^6+159q^4+20q^2-17) \ge 0$ nên

+, Nếu $24q^6-304q^4+65q^2+44 \le 0$ thì bất đẳng thức là hiển nhiên.

+, Nếu $1 \ge 2q$, ta có

$$\begin{aligned}
VT &\ge (37+117q^2-34q^4)\left(\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}\right)^2 \\
&\quad - \frac{2}{27}(1-q^2)(24q^6-304q^4+65q^2+44)\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27} \\
&\quad + \frac{(q^2-1)(175q^8-418q^6+159q^4+20q^2-17)}{243} \\
&= \frac{q^2(q+1)(6+22q+22q^2+38q^3+228q^4-164q^5+563q^6+341q^7-96q^8)}{729} \ge 0
\end{aligned}$$

+, Nếu $1 \le 2q$ và $24q^6-304q^4+65q^2+44 \ge 0$, suy ra $\frac{3}{4} \ge q \ge \frac{1}{2}$, ta có

$$\begin{aligned}
VT &\ge -\frac{2}{27}(1-q^2)(24q^6-304q^4+65q^2+44)\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27} \\
&\quad + \frac{(q^2-1)(175q^8-418q^6+159q^4+20q^2-17)}{243} \\
&= \frac{(1-q^2)(96q^9-381q^8-1216q^7-618q^6+260q^5+521q^4+176q^3+74q^2-37)}{729}
\end{aligned}$$

Ta có thể dễ dàng chứng minh được $96q^9-381q^8-1216q^7-618q^6+260q^5+521q^4+176q^3+74q^2-37 \geq 0$ với mọi $q \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

♡♡♡

144 *Cho các số không âm a, b, c thỏa $ab + bc + ca = 1$, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{\sqrt{a+bc}} + \frac{1}{\sqrt{b+ca}} + \frac{1}{\sqrt{c+ab}} \geq 2\sqrt{2}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Khi đó dễ thấy $a \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $a \geq 2$. Đặt $t = \sqrt{(a+b)(a+c)} - a$. Khi đó $t \geq 0$ và

$$t^2 + 2at = 1 \tag{2.6}$$

Chú ý rằng $(a+t^2) - (a+bc) = t^2 - bc = a(\sqrt{a+b} - \sqrt{a+c})^2 \geq 0$ nên

$$\frac{1}{\sqrt{a+bc}} \geq \frac{1}{\sqrt{a+t^2}} \tag{2.7}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{b+ca}} + \frac{1}{\sqrt{c+ab}} \geq \frac{2}{\sqrt{t(a+1)}} \tag{2.8}$$

Do

$$\frac{1}{\sqrt{b+ca}} + \frac{1}{\sqrt{c+ab}} \geq \frac{2}{\sqrt[4]{(b+ca)(c+ab)}}$$

theo bất đẳng thức AM–GM nên ta chỉ cần chứng minh $t^2(a+1)^2 \geq (b+ca)(c+ab)$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} t^2(a+1)^2 - (b+ca)(c+ab) &= a(a+1)^2(\sqrt{a+b} - \sqrt{a+c})^2 - a(b-c)^2 \\ &= \frac{a(b-c)^2[(a+1)^2 - (\sqrt{a+b} + \sqrt{a+c})^2]}{(\sqrt{a+b} + \sqrt{a+c})^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Vì

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{a + \frac{1}{a}}\right)^2 - \left(\sqrt{a+b} + \sqrt{a+c}\right)^2 = \frac{bc}{a} \geq 0,$$

và

$$\begin{aligned} (a+1)^2 - \left(\sqrt{a} + \sqrt{a + \frac{1}{a}}\right)^2 &= a^2 + 1 - \frac{1}{a} - 2\sqrt{a^2+1} \\ &= \sqrt{a^2+1}\left(\sqrt{a^2+1} - 2\right) - \frac{1}{a} \\ &\geq \sqrt{2^2+1}\left(\sqrt{2^2+1} - 2\right) - \frac{1}{2} = \frac{9 - 4\sqrt{5}}{2} > 0 \end{aligned}$$

Từ (2.7) và (2.8), ta còn phải chứng minh

$$\frac{2}{\sqrt{t(a+1)}} + \frac{1}{\sqrt{a+t^2}} \geq 2\sqrt{2}$$

Sử dụng (2.6), ta có bất đẳng thức tương đương

$$\frac{2}{\sqrt{1+2t-t^2}} + \sqrt{\frac{t}{2t^3 - t^2 + 1}} \geq 2$$

Hay

$$\left(\frac{2}{\sqrt{1+2t-t^2}}+\sqrt{\frac{t}{2t^3-t^2+1}}\right)^2 \geq 4$$

$$4\sqrt{(1+2t-t^2)(2t^3-t^2+1)} \geq \sqrt{t}(-8t^4+20t^3-7t^2-6t+7)$$

Sử dụng giả thiết $a \geq 2$ và (2.6), ta có $t \leq \frac{1}{4}$. Do đó

$$(1+2t-t^2)(2t^3-t^2+1) = t^4(5-2t)+2t(1-t)+1 \geq 1$$

$$-8t^4+20t^3-7t^2-6t = -8t^4-t^2(7-20t)-6t \leq 0$$

Như thế ta chỉ cần chứng minh

$$4 \geq 7\sqrt{t}$$

nhưng đây là điều hiển nhiên do $t \leq \frac{1}{4}$.

Trường hợp 2. $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq a \leq 2$. Sử dụng bất đẳng thức AM–GM,

$$\frac{1}{\sqrt{a+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c+ab}} \geq \frac{3}{\sqrt[6]{(a+bc)(b+ca)(c+ab)}}$$

Ta cần chứng minh

$$(a+bc)(b+ca)(c+ab) \leq \frac{729}{512}.$$

Đặt $S = a+b+c$ và $P = abc$. Do $a \leq 2$ và $ab+bc+ca = 1$ ta suy ra được $\sqrt{3} \leq S \leq \frac{5}{2}$. Đặt $u = \frac{1}{3}(S-\sqrt{S^2-3})$ và $v = \frac{1}{3}(S+2\sqrt{S^2-3})$. Ta dễ dàng kiểm tra được

$$2u+v = S, \quad u^2+2uv = 1, \quad \frac{5-\sqrt{13}}{6} \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \leq v \leq \frac{5+2\sqrt{13}}{6}, \quad 0 \leq P \leq u^2v$$

và

$$(a+bc)(b+ca)(c+ab) = P^2+(S^2-2S-1)P+1$$

Do $f(P) = P^2+(S^2-2S-1)P+1$ là hàm lồi nên

$$f(P) \leq \max\{f(0), f(u^2v)\} = \max\{1, f(u^2v)\}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{729}{512} \geq f(u^2v) = v^2(u+1)^2(v+u^2)$$

Hay

$$\frac{729}{64} \geq \frac{(1+2u-u^2)^2(2u^3-u^2+1)}{u}$$

$$u^3(2u^4-9u^3+7u^2-1)+(7u^4-5u^3+u^2-7u+1)-\frac{25}{64}u \leq 0$$

Ta sẽ chứng minh rằng với mọi $u \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$,

$$g(u) = 2u^4-9u^3+7u^2-1 \leq 0$$

$$h(u) = 7u^4-5u^3+u^2-7u+1 \leq 0$$

Thật vậy,

- Nếu $u \leq \frac{1}{3}$, ta có

$$g(u) \leq 2u^4+\frac{26}{5}u^2-1 \leq -\frac{161}{405} < 0$$

$$h(u) = (u^2+1)(1-5u)+u(7u^3-2) < 0$$

- Nếu $u \geq \frac{1}{3}$, ta có

$$g'(u) = u(8u^2 - 27u + 14) > 0$$
$$h'(u) = 28u^3 - 15u^2 + 2u - 7 < 13u^2 + 2u - 7 \leq 2u - \frac{8}{3} < 0$$

Suy ra $g(u)$ là hàm đồng biến và $h(u)$ là hàm nghịch biến. Do đó

$$g(u) \leq g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{14 - 9\sqrt{3}}{9} < 0, \qquad h(u) \leq h\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{107}{81} < 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

♡♡♡

145 *Cho các số dương a, b, c thỏa $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, chứng minh*

$$\sqrt{\frac{a+b}{b+1}} + \sqrt{\frac{b+c}{c+1}} + \sqrt{\frac{c+a}{a+1}} \geq 3$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta chỉ cần chứng minh

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq (a+1)(b+1)(c+1)$$

Từ $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, ta có $ab + bc + ca = abc(a + b + c)$. Do đó bất đẳng thức tương đương

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \geq 1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc$$

Hay

$$abc(a+b+c)^2 - abc \geq 1 + (a+b+c) + abc(a+b+c) + abc$$
$$abc((a+b+c)^2 - 1) \geq (1 + abc)(a+b+c+1)$$
$$(a+b+c)^2 - 1 \geq \left(1 + \frac{1}{abc}\right)(a+b+c+1)$$
$$a+b+c-1 \geq 1 + \frac{1}{abc}$$
$$a+b+c \geq 2 + \frac{1}{abc}$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{abc} \geq 2$$
$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{a^2b^2c^2(a+b+c)} - \frac{1}{abc} \geq 2\left(\frac{ab+bc+ca}{abc(a+b+c)}\right)^{3/2}$$
$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc(a+b+c)} - 1 \geq 2\left(\frac{(ab+bc+ca)^3}{abc(a+b+c)^3}\right)^{1/2}$$

Nhưng

$$\frac{(ab+bc+ca)^3}{abc(a+b+c)^3} \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{3abc(a+b+c)} = x^2 \ (x \geq 1)$$

Suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$3x^2 - 1 \geq 2x$$

Hay

$$(x-1)(3x+1) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

♡♡♡

146 *Cho $a_1, a_2, \dots, a_5$ là các số dương thỏa*

$$a_1a_2\cdots a_5 = a_1(1+a_2) + a_2(1+a_3) + \cdots + a_5(1+a_1) + 2$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_5}.$$

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng với mọi $x, y, z, t, u \geq 0$,

$$(x+y+z+t+u)^3 \geq 25(xyz + yzt + ztu + tux + uxy)$$

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $x = \min\{x, y, z, t, u\}$. Đặt $y = x + b, z = x + c, t = x + d, u = x + e$ thì $b, c, d, e \geq 0$, ta có

$$VT - VP = 5Ax + (b+c+d+e)^3 - 25cd(b+e)$$

với

$$\begin{aligned} A &= 3(b+c+d+e)^2 - 5be - 10bc - 5bd - 10cd - 5ce - 10de \\ &= \frac{1}{12}(6b+d+e-4c)^2 + \frac{5}{84}(7d-4c-5e)^2 + \frac{5}{28}(2c-e)^2 + \frac{5}{4}e^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$25cd(b+e) \leq 27cd(b+e) \leq (c+d+(b+e))^3 = (b+c+d+e)^3$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức này với $x = \frac{1}{a_1}, y = \frac{1}{a_2}, z = \frac{1}{a_3}, t = \frac{1}{a_4}, u = \frac{1}{a_5}$, ta được

$$P^3 \geq \frac{25(a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_5a_1)}{a_1a_2\cdots a_5}$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Maclaurin và bất đẳng thức AM–GM, ta được

$$\frac{125(a_1+a_2+\cdots+a_5)}{a_1a_2\cdots a_5} \leq P^4, \qquad \frac{3125}{a_1a_2\cdots a_5} \leq P^5$$

Suy ra

$$1 = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_5}{a_1a_2\cdots a_5} + \frac{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_5a_1}{a_1a_2\cdots a_5} + \frac{2}{a_1a_2\cdots a_5} \leq \frac{P^4}{125} + \frac{P^3}{25} + \frac{2P^5}{3125}$$

Hay

$$\frac{(2P-5)(P^4+15P^3+100P^2+250P+625)}{3125} \geq 0$$

Do đó ta được $P \geq \frac{5}{2}$. Mặt khác, cho $a_1 = a_2 = \cdots = a_5 = 2$, ta có $P = \frac{5}{2}$, vậy

$$\min P = \frac{5}{2}.$$

♡♡♡

147 *Với mọi số dương a, b, c, ta có*

$$\frac{a(a+c)}{b(b+c)} + \frac{b(b+a)}{c(c+a)} + \frac{c(c+b)}{a(a+b)} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{\text{cyc}} ab(a+c)(b+c)\right)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a(a+c)}{b(b+c)}\right) \ge (a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM,

$$(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^2 \ge 4(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca),$$

Như thế ta chỉ cần chứng minh

$$4(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2 \ge 3(a^2+b^2+c^2)\sum_{\text{cyc}} ab(a+c)(b+c)$$

Hay

$$(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM–GM, vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

148 *Chứng minh rằng với mọi a,b,c dương,*

$$\frac{a(b+c)}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{b(c+a)}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{c(a+b)}{\sqrt{c^2+ab}} \le \sqrt{6(a^2+b^2+c^2)}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz,

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{\sqrt{a^2+bc}}\right)^2 \le \left(\sum_{\text{cyc}} a^2(b+c)^2\right)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^2+bc}\right)$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có $(a^2+bc)(b+c) \ge b(a+c)^2$ và $(a^2+bc)(c+b) \ge c(a+b)^2$, suy ra

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2} \ge \frac{c}{(a^2+bc)(c+b)}+\frac{b}{(a^2+bc)(b+c)} = \frac{1}{a^2+bc}$$

Như thế, ta được

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab} \le 2\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)$$

Do đó

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{\sqrt{a^2+bc}}\right)^2 \le 2\left(\sum_{\text{cyc}} a^2(b+c)^2\right)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(b+c)^2}\right)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó, ta có

$$a^2(b+c)^2 \ge b^2(c+a)^2 \ge c^2(a+b) \qquad \text{và} \qquad \frac{1}{(b+c)^2} \ge \frac{1}{(c+a)^2} \ge \frac{1}{(a+b)^2}$$

Do đó, theo bất đẳng thức Chebyshev,

$$\left(\sum_{\text{cyc}} a^2(b+c)^2\right)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(b+c)^2}\right) \le 3\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2(b+c)^2}{(b+c)^2} = 3(a^2+b^2+c^2)$$

Vậy

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{\sqrt{a^2+bc}}\right)^2 \le 6(a^2+b^2+c^2)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

149 *Cho a, b, c là các số dương, chứng minh rằng*

$$3+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 2\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

Lời giải. Đặt $x^3=a$, $y^3=b$ và $z^3=c$. Theo bất đẳng thức Schur,

$$3+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}+\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}\ge\sum_{\text{cyc}}\frac{x^2}{y^2}\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)=\sum_{\text{cyc}}\frac{x^2}{yz}+\sum_{\text{cyc}}\frac{xz}{y^2}$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM–GM thì

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cyc}}\frac{x^2}{yz}+\sum_{\text{cyc}}\frac{xz}{y^2}&=\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}+\frac{(xz)^3+(yx)^3+(zy)^3}{(xyz)^2}\\&\ge 2\sqrt{\frac{(x^3+y^3+z^3)(x^3z^3+y^3x^3+z^3y^3)}{x^3y^3z^3}}\\&=2\sqrt{(x^3+y^3+z^3)\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)}\\&=2\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

150 *Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $ab+bc+ca=1$, chứng minh*

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}-2(a^2+b^2+c^2)\ge\sqrt{3}-2$$

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{a^2}{b}+b-2a\right)+\left(\sum_{\text{cyc}}a-\sqrt{3\sum_{\text{cyc}}ab}\right)\ge 2\left(\sum_{\text{cyc}}a^2-\sum_{\text{cyc}}ab\right)$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}}S_c(a-b)^2\ge 0$$

trong đó

$$S_a=\frac{1}{c}+t-1,\qquad S_b=\frac{1}{a}+t-1,\qquad S_c=\frac{1}{b}+t-1$$

với $t=\frac{1}{2\left(a+b+c+\sqrt{3}\right)}$.

Ta có

$$\begin{aligned}S_a+S_b+S_c&=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-3+\frac{3}{2\left(a+b+c+\sqrt{3}\right)}\\&=\frac{1}{abc}-3+\frac{3}{2\left(a+b+c+\sqrt{3}\right)}\\&\ge\frac{3\sqrt{3}}{(ab+bc+ca)^{\frac{3}{2}}}-3+\frac{3}{2\left(a+b+c+\sqrt{3}\right)}\\&=3\sqrt{3}-3+\frac{3}{2\left(a+b+c+\sqrt{3}\right)}>0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a &= \sum_{\text{cyc}} \left(t + \frac{1}{b} - 1\right)\left(t + \frac{1}{c} - 1\right) \\
&= 3t^2 + 2\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a} - 3\right)t + \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{ab} - 2\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a} + 3 \\
&> \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{ab} - 2\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a} + 3 = \frac{a+b+c+3abc-2}{abc} \ge 0
\end{aligned}
$$

Thật vậy, nếu $a+b+c \ge 2$ thì điều này là hiển nhiên, nếu $a+b+c \le 2$, đặt $p = a+b+c$ thì theo bất đẳng thức Schur, ta có $abc \ge \frac{p(4-p^2)}{9} \ge 0$, do đó

$$a+b+c+3abc-2 \ge p + \frac{4p-p^3}{3} - 2 = \frac{(2-p)(p-1)(p+3)}{3} \ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

♡♡♡

151 *Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng*

$$a+b+c+kabc \ge k+3$$

với mọi số không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca+6abc = 9$.

Lời giải. Cho $a = b = 3, c = 0$, ta được $k \le 3$. Ta sẽ chứng minh đây là giá trị ta cần tìm, tức là

$$a+b+c+3abc \ge 6$$

Đặt $p = a+b+c, q = ab+bc+ca, r = abc$. Giả thiết của bài toán có thể viết lại là $q+6r = 9$. Sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có $p^2 \ge 3q \ge 9$. Bất đẳng thức trở thành

$$p+3r \ge 6$$

Hay

$$2p-q \ge 3$$

Nếu $p \ge 6$, thì điều này hiển nhiên đúng. Xét $6 \ge p \ge 3$, khi đó có 2 trường hợp xảy ra

Trường hợp 1. Nếu $p^2 \ge 4q$ thì

$$2p-q \ge 2p - \frac{p^2}{4} = \frac{(p-2)(6-p)}{4} + 3 \ge 3$$

Trường hợp 2. Nếu $p^2 \le 4q$ thì theo bất đẳng thức Schur, ta có $r \ge \frac{p(4q-p^2)}{9} \ge 0$. Do đó

$$27 = 3q + 18r \ge 3q + 2p(4q-p^2)$$

Và vì thế

$$2p-q \ge 2p - \frac{2p^3+27}{8p+3}$$

Ta cần chứng minh

$$2p - \frac{2p^3+27}{8p+3} \ge 3$$

Hay

$$(p+1)(p-3)(p-6) \le 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Vậy

$$k_{\min} = 3.$$

♡♡♡

152 *Cho các số không âm a, b, c thỏa $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}\geq\sqrt{2}$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3(b+c)}{b^3+c^3}\geq\sqrt{2}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{a^3(b+c)}{b^3+c^3}+b+c\right)\geq 2(a+b+c)+\sqrt{2}$$

Hay

$$(a^3+b^3+c^3)\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a^2-ab+b^2}\geq 2(a+b+c)+\sqrt{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a^2-ab+b^2}\geq\frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)}$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$\frac{9(a^3+b^3+c^3)}{2(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)}\geq 2(a+b+c)+\sqrt{2}$$

Đặt $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$ thì ta có $p,q,r\geq 0$ và $p=\sqrt{1+2q}, 1\geq q$. Khi đó, bất đẳng thức trên có thể viết lại là

$$9(p(1-q)+3r)\geq\left(2p+\sqrt{2}\right)(2-q)$$

Hay

$$5p-7pq+\sqrt{2}q+27r\geq 2\sqrt{2}$$

Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $1\geq 2$, bất đẳng thức tương đương với

$$f(q)=5\sqrt{2q+1}-7q\sqrt{2q+1}+\sqrt{2}q+27r\geq 2\sqrt{2}$$

Ta có

$$f'(q)=\frac{\sqrt{2(2q+1)}-21q-2}{\sqrt{2q+1}}\leq\frac{\sqrt{2(1+1)}-21q-2}{\sqrt{2q+1}}=-\frac{21q}{\sqrt{2q+1}}<0$$

Suy ra, $f(q)$ là hàm nghịch biến. Suy ra,

$$f(q)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{2}+27r\geq 2\sqrt{2}$$

Trường hợp 2. $2q\geq 1$, sử dụng bất đẳng thức Schur, ta có $r\geq\frac{p(4q-p^2)}{9}=\frac{p(2q-1)}{9}\geq 0$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$5p-7pq+\sqrt{2}q+3p(2q-1)\geq 2\sqrt{2}$$

Hay

$$g(q)=2\sqrt{2q+1}-q\sqrt{2q+1}+\sqrt{2}q\geq 2\sqrt{2}$$

Ta có

$$g'(q) = \frac{\sqrt{2(2q+1)} - 3q + 1}{\sqrt{2q+1}} \geq \frac{\sqrt{2(1+1)} - 3q + 1}{\sqrt{2q+1}} = \frac{3(1-q)}{\sqrt{2q+1}} \geq 0$$

Do đó, $g(q)$ là hàm đồng biến. Suy ra,

$$g(q) \geq g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

♡♡♡

153 *Cho các số không âm x, y, z thỏa $6 \geq x + y + z \geq 3$, chứng minh rằng*

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} + \sqrt{1+z} \geq \sqrt{xy + yz + zx + 15}$$

Lời giải. Đặt $a^2 = 1 + x, b^2 = 1 + y, c^2 = 1 + z, d = a^2 + b^2 + c^2$ thì ta có $a, b, c \geq 1$ và $9 \geq d \geq 6$, bất đẳng thức trở thành

$$a + b + c \geq \sqrt{18 - 2d + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

Hay

$$3d + 2(ab + bc + ca) \geq 18 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

Sử dụng giả thiết $9 \geq d \geq 6$ và bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$3d(d-6) \geq \frac{1}{3}d^2(d-6) \geq (d-6)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Suy ra

$$3d + \frac{6(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{d} \geq 18 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

Ta cần chứng minh

$$ab + bc + ca \geq \frac{3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{d}$$

Hay

$$(ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}}(b+c)(4a - b - c)(a-b)(a-c) \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, ta có

$$\sum_{\text{cyc}}(b+c)(4a-b-c)(a-b)(a-c) = (a-b)^2(5ab+3bc+3ca-7c^2)+(a+b)(4c-a-b)(c-a)(c-b)$$

Chú ý rằng

$$9c^2 \geq 9 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Suy ra

$$8c^2 \geq a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$$

Do đó

$$4c - a - b \geq 0$$

Từ đây, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$ hoặc $x = y = z = 1$.

♡♡♡

154 *Cho các số dương x, y, z thỏa $xyz = 1$, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{y+z}{x^3+yz}+\frac{z+x}{y^3+zx}+\frac{x+y}{z^3+xy}\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức GM - HM, ta có

$$1=\sqrt[3]{xyz}\ge\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

Đặt $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}, c=\frac{1}{z}$ thì ta có $a, b, c>0$ và $1\ge\frac{3}{a+b+c}$, do đó

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{y+z}{x^3+yz}\le\left(\sum_{\text{cyc}}a\right)\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3(b+c)}{3a^3+bc(a+b+c)}\right)$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}}a^2\ge\left(\sum_{\text{cyc}}a\right)\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3(b+c)}{3a^3+bc(a+b+c)}\right)$$

Hay

$$\frac{3\sum_{\text{cyc}}a^2}{\sum_{\text{cyc}}a}\ge\sum_{\text{cyc}}\frac{3a^3(b+c)}{3a^3+bc(a+b+c)}$$

Hay

$$\frac{\sum_{\text{cyc}}(a-b)^2}{\sum_{\text{cyc}}a}+\sum_{\text{cyc}}\frac{a(3a^3-3a^2(b+c)+3abc+bc(b+c-2a))}{3a^3+bc(a+b+c)}\ge 0$$

$$\frac{\sum_{\text{cyc}}(a-b)^2}{\sum_{\text{cyc}}a}+3\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2(a-b)(a-c)}{3a^3+bc(a+b+c)}+abc\sum_{\text{cyc}}\frac{b+c-2a}{3a^3+bc(a+b+c)}\ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$, dễ thấy $\frac{a^3}{3a^3+bc(a+b+c)}\ge\frac{b^3}{3b^3+ac(a+b+c)}>0$ nên theo định lý 2, ta có

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2(a-b)(a-c)}{3a^3+bc(a+b+c)}\ge 0$$

Ta còn phải chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{b+c-2a}{3a^3+bc(a+b+c)}\ge 0$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}}S_c(a-b)^2\ge 0$$

trong đó

$$S_a=(3b^2+3c^2-a^2+3bc-ca-ab)(3a^3+bc(a+b+c))$$
$$S_b=(3c^2+3a^2-b^2+3ca-ab-bc)(3b^3+ca(a+b+c))$$
$$S_c=(3a^2+3b^2-c^2+3ab-bc-ca)(3c^3+ab(a+b+c))$$

Do $a\ge b\ge c>0$ nên dễ thấy $S_b, S_c\ge 0$. Ta có

$$\begin{aligned}a^2S_b+b^2S_a&=c(a+b+c)((a-b)^2(a+b)(2a^2+ab+2b^2)+c(a-b)(a^3-b^3)\\&+a^5+b^5+3(a^3+b^3)c^2+2(a^4+b^4)c)+3a^2b^2(2(a-b)^2(a+b)\\&+3(a+b)c^2+2(a^2+b^2)c+(a-b)^2c)\ge 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

♡♡♡

155 *Cho các số dương a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$3\sqrt[9]{\frac{9a(a+b)}{2(a+b+c)^2}}+\sqrt[3]{\frac{6bc}{(a+b)(a+b+c)}}\le 4$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned}
&\left(3\sqrt[9]{\frac{9a(a+b)}{2(a+b+c)^2}}+\sqrt[3]{\frac{6bc}{(a+b)(a+b+c)}}\right)^9\\
&=\left(\sqrt[9]{\frac{9a(a+b)}{2(a+b+c)^2}}+\sqrt[9]{\frac{9a(a+b)}{2(a+b+c)^2}}+\sqrt[9]{\frac{9a(a+b)}{2(a+b+c)^2}}+\sqrt[9]{\frac{6^3b^3c^3}{(a+b)^3(a+b+c)^3}}\right)^9\\
&\le\left(\frac{a}{a+b}+\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}+\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}+\frac{b}{a+b}+\frac{3c}{a+b+c}\right)\times\\
&\times\left(\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}+\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}+\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{3c}{a+b+c}\right)\times\\
&\times\left(\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}+\frac{a}{a+b}+\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}+\frac{b}{a+b}+\frac{3c}{a+b+c}\right)=4^9
\end{aligned}$$

Từ đây ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét. Tổng quát hóa, ta có bài toán IMO Shortlist 2004

Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương. Gọi g_n là trung bình nhân của chúng và $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là dãy trung bình cộng

$$A_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\qquad \forall k=\overline{1,n}$$

Gọi G_n là trung bình nhân của $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Chứng minh bất đẳng thức

$$n\sqrt[n]{\frac{G_n}{A_n}}+\frac{g_n}{G_n}\le n+1$$

Lời giải như sau

Chú ý rằng với mọi $k=1,2,\ldots,n$, ta có

$$\frac{a_k}{A_k}=\frac{kA_k-(k-1)A_{k-1}}{A_k}=k-(k-1)\frac{A_{k-1}}{A_k}$$

ở đây ta đặt $A_0=0$. Đặt

$$x_1=1,\qquad x_k=\frac{A_{k-1}}{A_k},\qquad \forall k=\overline{2,n}$$

Ta có

$$\sqrt[n]{\frac{G_n}{A_n}}=\sqrt[n^2]{\frac{A_1A_2\ldots A_n}{A_n^n}}=\sqrt[n^2]{x_2x_3^2\cdots x_n^{n-1}},\qquad \frac{g_n}{G_n}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n\frac{a_k}{A_k}}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n(k-(k-1)x_k)}$$

Do đó

$$n\sqrt[n]{\frac{G_n}{A_n}}+\frac{g_n}{G_n}=n\sqrt[n^2]{x_2x_3^2\cdots x_n^{n-1}}+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n(k-(k-1)x_k)}$$

Ta sẽ chứng minh

$$n\sqrt[n^2]{x_2x_3^2\cdots x_n^{n-1}}+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n(k-(k-1)x_k)}\le n+1$$

bằng 2 cách

Cách 1. Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$n\sqrt[n^2]{x_2x_3^2\cdots x_n^{n-1}} = n\sqrt[n^2]{x_1^{n(n+1)/2}x_2x_3^2\cdots x_n^{n-1}} \le \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}x_1 + \sum_{k=2}^{n}(k-1)x_k\right)$$
$$= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)x_k$$

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(k-(k-1)x_k)} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-(k-1)x_k) = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)x_k$$

Cộng tương ứng vế với vế 2 bất đẳng thức trên, ta có đpcm.

Cách 2. Sử dụng bất đẳng thức Hölder

$$\sum_{j=1}^{n+1}\sqrt[n]{\alpha_{1j}\alpha_{2j}\cdots\alpha_{nj}} \le \sqrt[n]{\left(\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_{1j}\right)\left(\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_{2j}\right)\cdots\left(\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_{nj}\right)}$$

với

$$\alpha_{1j} = 1 \qquad \forall j = \overline{1, n+1}$$
$$\alpha_{kj} = \sqrt[n]{x_k^{k-1}}, \qquad \forall k = \overline{2,n}, j = \overline{1,n}$$
$$\alpha_{k,n+1} = k-(k-1)x_k, \qquad \forall k = \overline{2,n}$$

Khi đó, ta có

$$\sum_{j=1}^{n+1}\sqrt[n]{\alpha_{1j}\alpha_{2j}\cdots\alpha_{nj}} = n\sqrt[n^2]{x_2x_3^2\cdots x_n^{n-1}} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(k-(k-1)x_k)}$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_{1j} = n+1, \qquad \sum_{j=1}^{n+1}\alpha_{kj} = n\sqrt[n]{x_k^{k-1}} + k-(k-1)x_k \qquad \forall k = \overline{2,n}$$

Lại có với mọi $k = \overline{2,n}$ thì

$$n\sqrt[n]{x_k^{k-1}} + k-(k-1)x_k = n\sqrt[n]{x_1^{n-k+1}x_k^{k-1}} + k-(k-1)x_k$$
$$\le (n-k+1)x_1 + (k-1)x_k + k-(k-1)x_k = n+1$$

Vậy ta có đpcm.

♡♡♡

156 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{(a+2b)^2} + \frac{1}{(b+2c)^2} + \frac{1}{(c+2a)^2} \ge \frac{1}{ab+bc+ca}$$

Lời giải. Ta có 2 bổ đề sau

Bổ đề 1. *Với mọi a, b, c không âm, ta có*

$$a^3+b^3+c^3-3abc \ge 4(a-b)(b-c)(c-a)$$

Thật vậy, không mất tínhtổng quát, giả sử $c = \min\{a,b,c\}$, đặt $a = c+x, b = c+y$, ta có

$$VT - VP = 3(x^2-xy+y^2)c + x^3 + y(2x-y)^2 \ge 0$$

Bổ đề 2. *Với mọi a, b, c không âm thì*

$$ab^2+bc^2+ca^2 \le \frac{4}{27}(a+b+c)^3 - abc$$

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$, đặt $a = c + x, b = c + y$, ta có

$$VT - VP = \frac{9(x^2 - xy + y^2)c + (2x - y)^2(x + 4y)}{27} \geq 0$$

Trở lại bài toán của ta. Bất đẳng thức tương đương với

$$4\left(\sum_{cyc} a^4\right)\left(\sum_{cyc} ab\right) + 5\sum_{cyc} a^3b^3 + 4\sum_{cyc} a^4bc + 5abc\sum_{cyc} ab(a + b) - 21a^2b^2c^2$$
$$\geq 12(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) + 24abc\sum_{cyc} ab^2$$

Theo trên, ta có

$$4(a - b)(b - c)(c - a) \leq \sum_{cyc} a^3 - 3abc, \qquad \sum_{cyc} ab^2 \leq \frac{4(a + b + c)^3}{27} - abc$$

Nên ta chỉ cần chứng minh rằng

$$4\left(\sum_{cyc} a^4\right)\left(\sum_{cyc} ab\right) + 5\sum_{cyc} a^3b^3 + 4\sum_{cyc} a^4bc + 5abc\sum_{cyc} ab(a + b) - 21a^2b^2c^2$$
$$\geq 3\left(\sum_{cyc} a^3 - 3abc\right)(a + b)(b + c)(c + a) + 24abc\left(\frac{4(a + b + c)^3}{27} - abc\right)$$

Hay

$$9\sum_{cyc} ab(a^4 + b^4) + 45\sum_{cyc} a^3b^3 - 27\sum_{cyc} a^2b^2(a^2 + b^2) - 14abc\sum_{cyc} a^3 + 3abc\sum_{cyc} ab(a + b) - 3a^2b^2c^2 \geq 0$$

$$9\left(\sum_{cyc} ab(a^4 + b^4) - \sum_{cyc} a^2b^2(a^2 + b^2)\right) - 18\left(\sum_{cyc} a^2b^2(a^2 + b^2) - 2\sum_{cyc} a^3b^3\right)$$
$$+ 9\left(\sum_{cyc} a^3b^3 - 3a^2b^2c^2\right) - 14abc\left(\sum_{cyc} a^3 - 3abc\right) + 3abc\left(\sum_{cyc} ab(a + b) - 6abc\right) \geq 0$$

$$\sum_{cyc}(a - b)^2(18ab(a^2 - ab + b^2) + 9c^2(ab + bc + ca) - 14abc(a + b + c) + 6abc^2) \geq 0$$

Ta sẽ chứng minh

$$18ab(a^2 - ab + b^2) + 9c^2(ab + bc + ca) - 14abc(a + b + c) + 6abc^2 \geq 0$$

Thật vậy, đặt $t = \sqrt{ab}$, ta có

$$18ab(a^2 - ab + b^2) + 9c^2(ab + bc + ca) - 14abc(a + b + c) + 6abc^2$$
$$= \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2\left(9c^3 - 14abc + 18ab\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2\right) + t(18t^3 - 28t^2c + tc^2 + 18c^3)$$
$$\geq \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2(9c^3 - 14t^2c + 72t^3) \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

♡♡♡

157 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\le 2$$

Lời giải. Ta có

$$2-\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}-\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$
$$=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)(ab^5+bc^5+ca^5-ab^2c^3-bc^2a^3-ca^2b^3)}{(a^2+b^2+c^2)(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)}\ge 0$$

Nên bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $\frac{b}{a}\to 0, \frac{c}{b}\to 0$ và các hoán vị tương ứng.

Nhận xét. Có một đẳng thức khá đẹp và đặc biệt là

$$2-\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)(ab^2+bc^2+ca^2)}{(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)}$$

♡♡♡

158 *Cho các số không âm x, y, z thỏa $x+y+z=3$, chứng minh bất đẳng thức*

$$x^2y+y^2z+\frac{3}{2}xyz\le 4$$

Lời giải. Nếu $x\ge 2y$, ta sẽ chứng minh

$$x^2y+y^2z+\frac{3}{2}xyz\le (x+z)^2y$$

Thật vậy, ta có

$$(x+z)^2y-x^2y-y^2z-\frac{3}{2}xyz=\frac{yz(x-2y+2z)}{2}\ge 0$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM-GM thì

$$y(x+z)^2\le 4\left(\frac{y+(x+z)}{3}\right)^3=4$$

Suy ra

$$x^2y+y^2z+\frac{3}{2}xyz\le (x+z)^2y\le 4$$

Ta còn phải xét trường hợp $2y\ge x$, khi đó bất đẳng thức tương đương với

$$f(z)=4(x+y+z)^3-27x^2y-27y^2z-\frac{81}{2}xyz\ge 0$$

Ta có

$$f'(z)=3\left(4(x+y+z)^2-\frac{9}{2}y(2y+3x)\right)$$
$$f'(z)=0\Leftrightarrow z=\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{y(2y+3x)}-x-y$$

Do $2y\ge x$ nên $\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{y(2y+3x)}-x-y\ge 0$, từ đây dễ thấy

$$f(z)\ge f\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{y(2y+3x)}-x-y\right)=\frac{27}{2}y\left(x^2+5xy+2y^2-\frac{\sqrt{y}(3x+2y)^{3/2}}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\frac{27xy(x-2y)^2(2x+y)}{4\left(x^2+5xy+2y^2+\frac{\sqrt{y}(3x+2y)^{3/2}}{\sqrt{2}}\right)}\ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2, y = 1, z = 0$ hoặc $x = 0, y = 2, z = 1$.

♡♡♡

159 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \geq \frac{3(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}$$

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+bc} \geq \frac{3(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Hay

$$3 + \sum_{\text{cyc}} \frac{b^2+c^2-bc}{a^2+bc} \geq \frac{3(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cyc}} \frac{b^2+c^2-bc}{a^2+bc} &\geq \frac{(2(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca)^2}{\sum_{\text{cyc}}(a^2+bc)(b^2+c^2-bc)} \\ &= \frac{(2(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca)^2}{(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)-4abc(a+b+c)}\end{aligned}$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh

$$3 + \frac{(2(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca)^2}{(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)-4abc(a+b+c)} \geq \frac{3(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Giả sử $a+b+c = 1$, đặt $q = ab+bc+ca, r = abc$ thì ta có $\frac{1}{3} \geq q \geq 0$. Theo bất đẳng thức Schur thì $r \geq \max\left\{0, \frac{4q-1}{9}\right\}$. Bất đẳng thức trở thành

$$3 + \frac{(2-5q)^2}{q-q^2-4r} \geq \frac{3}{2q}$$

Nếu $4q \leq 1$, ta có

$$3 + \frac{(2-5q)^2}{q-q^2-4r} - \frac{3}{2q} \geq 3 + \frac{(2-5q)^2}{q-q^2} - \frac{3}{2q} = \frac{(5-11q)(1-4q)}{2q(1-q)} \geq 0$$

Nếu $4q \geq 1$, ta có

$$3 + \frac{(2-5q)^2}{q-q^2-4r} - \frac{3}{2q} \geq 3 + \frac{(2-5q)^2}{q-q^2-\frac{4(4q-1)}{9}} - \frac{3}{2q} = \frac{3(11-4q)(1-3q)(4q-1)}{2q(4-7q-9q^2)} \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị tương ứng.

♡♡♡

160 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{4}{3}(ab^2+bc^2+ca^2) + a^2+b^2+c^2+2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} = \sum_{\text{cyc}} \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}} \geq \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}} = \frac{(ab+bc+ca)^2}{abc(a+b+c)}$$

Suy ra

$$ab^2+bc^2+ca^2 \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{a+b+c}$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\frac{4(ab+bc+ca)^2}{3(a+b+c)} + 2 \geq 6\sqrt[3]{\frac{(ab+bc+ca)^4}{9(a+b+c)^2}}$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+6\sqrt[3]{\frac{(ab+bc+ca)^4}{9(a+b+c)^2}} \geq 3(ab+bc+ca)$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng do $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

♡♡♡

161 *Cho các số không âm a,b,c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}} \geq \frac{4}{a+b+c}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}\right)^2 \left(\sum_{\text{cyc}} (b+c)^3(4a^2+bc)\right) \geq 8(a+b+c)^3$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh

$$(a+b+c)^5 \geq 2\sum_{\text{cyc}} (b+c)^3(4a^2+bc)$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} a^3(a-b)(a-c) + 4\sum_{\text{cyc}} ab(a^2-b^2)(a-b) + abc\left(19\sum_{\text{cyc}} a^2 - 18\sum_{\text{cyc}} ab\right) \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) \sim (1,1,0)$.

♡♡♡

162 *Cho các số thực a,b,c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1+a^2b^2}{(a-b)^2}+\frac{1+b^2c^2}{(b-c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c-a)^2} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải. Dễ dàng chứng minh được

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1+ab}{a-b} \cdot \frac{1+bc}{b-c} = 1$$

và

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1-ab}{a-b} \cdot \frac{1-bc}{b-c} = -1$$

Do đó, sử dụng bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ và $x^2+y^2+z^2 \geq -2(xy+yz+zx)$ với mọi $x,y,z \in \mathbb{R}$, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{1+ab}{a-b}\right)^2 \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{1+ab}{a-b} \cdot \frac{1+bc}{b-c} = 1$$

$$\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{1-ab}{a-b}\right)^2 \geq -2\sum_{\text{cyc}} \frac{1-ab}{a-b} \cdot \frac{1-bc}{b-c} = 2$$

Từ đó, suy ra

$$2\sum_{\text{cyc}} \frac{1+a^2b^2}{(a-b)^2} = \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{1+ab}{a-b}\right)^2 + \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{1-ab}{a-b}\right)^2 \geq 3$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $(a,b,c) = \left(-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\right)$.

♡♡♡

163 *Cho các số không âm a,b,c, chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2}}$$

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{b^2} + 2\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2b}{c} \geq \frac{9(a^4+b^4+c^4)}{a^2+b^2+c^2}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a^4}{b^2} + b^2 - 2a^2\right) + 2\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a^2b}{c} + bc - 2ab\right) \geq 3\left(\frac{3(a^4+b^4+c^4)}{a^2+b^2+c^2} - \sum_{\text{cyc}} a^2\right) + 2\left(\sum_{\text{cyc}} a^2 - \sum_{\text{cyc}} ab\right)$$

$$\sum_{\text{cyc}} S_a(b-c)^2 \geq 0$$

trong đó

$$S_a = \frac{b^2}{c^2} + \frac{2b}{c} + \frac{2a}{b} - \frac{3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$S_b = \frac{c^2}{a^2} + \frac{2c}{a} + \frac{2b}{c} - \frac{3(c+a)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$S_c = \frac{a^2}{b^2} + \frac{2a}{b} + \frac{2c}{a} - \frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét trường hợp $a \geq b \geq c$ là đủ. Khi đó, dễ thấy rằng $S_a \geq 0$.

Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. Nếu $b-c \geq a-b \geq 0$, suy ra $2(b-c) \geq a-c$ và $2b \geq a+c$. Ta có

$$\begin{aligned} S_a + S_c &= \frac{b^2}{c^2} + \frac{2b}{c} + \frac{2a}{b} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{2c}{a} + \frac{2b}{c} - \frac{3(a+c)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \\ &\geq 9 - \frac{3(a+c)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{3((2a-b)^2+(2c-b)^2)}{2(a^2+b^2+c^2)} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_a+4S_b &= \frac{4c^2}{a^2}+\frac{8c}{a}+\frac{10b}{c}+\frac{2a}{b}+\frac{b^2}{c^2}-\frac{3(b+c)^2+12(a+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\\
&\ge \frac{4c}{a}-1+\frac{8c}{a}+\frac{5a}{c}+5+\frac{2a}{b}+\frac{b^2}{c^2}-\frac{3(b+c)^2+12(a+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\\
&\ge 22-\frac{3(b+c)^2+12(a+c)^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{10a^2+19b^2+7c^2-24ca-6bc}{a^2+b^2+c^2}\ge 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_a+4S_b+S_c &= \frac{4c^2}{a^2}+\frac{10c}{a}+\frac{10b}{c}+\frac{4a}{b}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{a^2}{b^2}-\frac{3(b+c)^2+12(a+c)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}\\
&\ge 26-\frac{3(b+c)^2+12(a+c)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{11a^2+20b^2+11c^2-24ab}{a^2+b^2+c^2}\ge 0
\end{aligned}$$

Như thế

+, Nếu $S_b\ge 0$ thì

$$\sum_{\text{cyc}} S_a(b-c)^2\ge (S_a+S_c)(a-b)^2\ge 0$$

+, Nếu $S_b\le 0, S_c\ge 0$ thì

$$\sum_{\text{cyc}} S_a(b-c)^2\ge (S_a+4S_b)(b-c)^2\ge 0$$

+, Nếu $S_b, S_c\le 0$ thì

$$\sum_{\text{cyc}} S_a(b-c)^2\ge (S_a+4S_b+S_c)(b-c)^2\ge 0$$

Trường hợp 2. Nếu $a-b\ge b-c\ge 0$, ta sẽ chứng minh $S_c\ge 0$, thật vậy xét hàm số $f(c)=S_c=\frac{a^2}{b^2}+\frac{2a}{b}+\frac{2c}{a}-\frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}$, rõ ràng $f(c)$ là hàm đồng biến nên

$$f(c)\ge f(\max\{0,2b-a\})$$

Nếu $a\ge 2b$ thì

$$f(c)\ge f(0)=\frac{a^2}{b^2}+\frac{2a}{b}-\frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2}\ge 8-\frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2}\ge 0$$

Nếu $2b\ge a$ thì

$$f(c)\ge f(2b-a)=\frac{a^2}{b^2}+\frac{2a}{b}+\frac{4b}{a}-2-\frac{3(a+b)^2}{2a^2-4ab+5b^2}\ge 0$$

Vậy ta có $S_a, S_c\ge 0$. Như vậy nếu $S_b\ge 0$ thì bất đẳng thức là hiển nhiên, ngược lại nếu $S_b\le 0$, ta có

$$\begin{aligned}
S_a+2S_b &= \frac{2c^2}{a^2}+\frac{4c}{a}+\frac{6b}{c}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{2a}{b}-\frac{6(a+c)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\\
&\ge \frac{8c}{a}-2+\frac{8b}{c}-1+\frac{2a}{b}-\frac{6(a+c)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\\
&\ge 12-\frac{6(a+c)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\ge 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_c+2S_b &= \frac{2c^2}{a^2}+\frac{6c}{a}+\frac{4b}{c}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{2a}{b}-\frac{6(a+c)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}\\
&\ge \frac{\left(2\sqrt{2}+6\right)c}{a}-1+\frac{4b}{c}+\frac{4a}{b}-1-\frac{6(a+c)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}\\
&\ge 13.6-\frac{6(a+c)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}\ge 0
\end{aligned}$$

Do đó
$$\sum_{\text{cyc}} S_a(b-c)^2 \ge (S_a+2S_b)(b-c)^2+(S_c+2S_b)(a-b)^2 \ge 0$$
Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

♡♡♡

164 *Cho các số dương a,b,c, chứng minh rằng*
$$\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-2}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge 2$$
Lời giải. **Cách 1.** Đặt $x=\frac{a}{b}, y=\frac{b}{c}, z=\frac{c}{a}$ thì ta có $xyz=1$ và bất đẳng thức trở thành
$$\sqrt{x+y+z-2}+\frac{8}{(x+1)(y+1)(z+1)} \ge 2$$
Chú ý rằng trong 3 số x,y,z luôn tồn tại ít nhất 2 số không lớn hơn 1 hoặc không bé hơn 1, chẳng hạn $(x-1)(y-1)\ge 0$, suy ra $(x+1)(y+1)\le 2(xy+1)$. Đặt $t=\sqrt{xy}$, khi đó ta có
$$VT \ge \sqrt{2t+z-2}+\frac{4}{(z+1)(t+1)}=\frac{\sqrt{2t^3-2t^2+1}}{t}+\frac{4t^2}{(t^2+1)^2}$$
Ta cần chứng minh
$$\frac{\sqrt{2t^3-2t^2+1}}{t}+\frac{4t^2}{(t^2+1)^2} \ge 2$$
Hay
$$\frac{\sqrt{2t^3-2t^2+1}}{t}-1 \ge 1-\frac{4t^2}{(t^2+1)^2}$$
$$(t-1)^2\left(\frac{2t+1}{t\sqrt{2t^3-2t^2+1}+t^2}-\frac{(t+1)^2}{(t^2+1)^2}\right) \ge 0$$
Theo bất đẳng thức AM–GM, ta có
$$\begin{aligned}\frac{2t+1}{t\sqrt{2t^3-2t^2+1}+t^2}-\frac{(t+1)^2}{(t^2+1)^2} &\ge \frac{2t+1}{\frac{t^2+(2t^3-2t^2+1)}{2}+t^2}-\frac{(t+1)^2}{(t^2+1)^2}\\ &=\frac{2t^5-3t^4+4t^3+2t^2+2t+1}{(2t^3+t^2+1)(t^2+1)^2} \ge 0\end{aligned}$$
Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2. Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\min\{a,b,c\}$. Bất đẳng thức tương đương
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-2 \ge 4-\frac{32abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{64a^2b^2c^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}$$
Chú ý rằng $\frac{64a^2b^2c^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} \le \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ nên ta chỉ cần chứng minh
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3 \ge 3-\frac{24abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
Hay
$$\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac} \ge \frac{3(2c(a-b)^2+(a+b)(a-c)(b-c))}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$c(a-b)^2((a+b)(b+c)(c+a)-6abc)+b(a-c)(b-c)(a+b)((a+c)(b+c)-3abc) \ge 0$$

Ta chứng minh kết quả mạnh hơn là

$$c(a-b)^2((a+b)(b+c)(c+a)-8abc)+b(a-c)(b-c)(a+b)((a+c)(b+c)-3abc)\geq 0$$

Hay

$$2c^2(a-b)^4+(a-c)(b-c)(a+b)(c(a-b)^2+b(a+c)(b+c)-3abc)\geq 0$$

Ta có

$$\begin{aligned}c(a-b)^2+b(a+c)(b+c)-3abc &= ab^2+a^2c+2b^2c+bc^2-4abc\\ &\geq ab^2+a^2c+3bc^2-4abc\geq \left(3\sqrt[3]{3}-4\right)abc\geq 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

♡♡♡

165 *Cho các số thực a,b,c, chứng minh bất đẳng thức*

$$\left(\frac{a(b+c)}{(a+b)(a+c)}\right)^2+\left(\frac{b(c+a)}{(b+c)(b+a)}\right)^2+\left(\frac{c(a+b)}{(c+a)(c+b)}\right)^2\geq\frac{1}{2}$$

Lời giải. Ta có

$$\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{a(b+c)}{(a+b)(a+c)}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2+32a^2b^2c^2}{2(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}$$

Nên bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)\sim(1,1,0)$.

♡♡♡

166 *Cho các số không âm x,y,z thỏa $x+y+z=1$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2}\leq\frac{11}{5}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $x=\max\{x,y,z\}$. Đặt $x+z=2t, x-z=2m$ thì ta có $t\geq m\geq 0$. Khi đó, ta có

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2}=\sqrt{t+m+y^2}+\sqrt{y+(m-t)^2}+\sqrt{(t+m)^2+t-m}=f(m)$$

Ta có

$$f''(m)=\frac{8t-1}{4((t+m)^2+t-m)^{3/2}}-\frac{1}{4(t+m+y^2)^{3/2}}+\frac{y}{(y+(m-t)^2)^{3/2}}$$

Ta sẽ chứng minh $f''(m)\geq 0$ bằng cách chứng min

$$\frac{8t-1}{((t+m)^2+t-m)^{3/2}}\geq\frac{1}{(t+m+y^2)^{3/2}}$$

Hay

$$(8t-1)^2(t+m+y^2)^3\geq((t+m)^2+t-m)^3$$

$$(4(x+z)-1)^2(x+y^2)^3\geq(x^2+z)^3$$

+, Nếu $x\geq y\geq z\geq 0$ thì ta có $2(x+z)\geq x+y+z=1$, suy ra $4(x+z)-1\geq 1$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$x+y^2\geq x^2+z$$

Hay

$$y(x-z)\geq z^2-y^2 \text{ (đúng)}$$

+, Nếu $x \geq z \geq y \geq 0$, khi đó, dễ thấy

$$x + y^2 \geq \frac{4}{9}(x^2 + z) \geq 0$$

Do đó

$$\begin{aligned}(4(x+z)-1)^2(x+y^2)^3 - (x^2+z)^3 &= (3x-y+3z)^2(x+y^2)^3 - (x^2+z)^3 \\ &\geq \frac{4}{9}(3x-y+3z)^2(x+y^2)^2(x^2+z) - (x^2+z)^3\end{aligned}$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{4}{9}(3x-y+3z)^2(x+y^2)^2 \geq (x^2+z)^2$$

Hay

$$4(3x-y+3z)^2(x^2+x(y+z)+y^2)^2 \geq 9(x+y+z)^2(x^2+xz+yz+z^2)^2$$
$$2(3x-y+3z)(x^2+x(y+z)+y^2) \geq 3(x+y+z)(x^2+xz+yz+z^2)$$
$$g(x) = 3x^3 + (y+6z)x^2 + 2(2y^2-yz)x - 2y^3 + 3y^2z - 6yz^2 - 3z^3 \geq 0$$

Dễ thấy $g(x)$ là hàm đồng biến nên

$$g(x) \geq g(z) = 6z^3 - 7yz^2 + 7y^2z - 2y^3 \geq 0 \text{ (do } z \geq y \geq 0)$$

Vậy trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$f''(m) \geq 0$$

Do đó, $f(m)$ là hàm lồi. Suy ra

$$f(m) \leq \max\{f(0), f(t)\}$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$\max\{f(0), f(t)\} \leq \frac{11}{5}$$

Điều này có nghĩa là ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đã cho trong trường hợp trong 3 số x, y, z có 1 số bằng 0, hoặc trong trường hợp trong 3 số x, y, z có 2 số bằng nhau.

Trường hợp 1. $xyz = 0$, không mất tính tổng quát, giả sử $z = 0$. Khi đó, ta cần chứng minh

$$\sqrt{x+y^2} + \sqrt{y} + x \leq \frac{11}{5} \qquad \forall x, y \geq 0 : x + y = 1$$

Hay

$$\sqrt{y^2 - y + 1} \leq y - \sqrt{y} + \frac{6}{5}$$
$$t^4 - t^2 + 1 \leq \left(t^2 - t + \frac{6}{5}\right)^2 \qquad (t = \sqrt{y} \in [0,1])$$
$$2t^3 - \frac{22}{5}t^2 + \frac{12}{5}t - \frac{11}{25} \leq 0 \text{ (đúng do } 1 \geq t \geq 0)$$

Trường hợp 2. $(x-y)(y-z)(z-x) = 0$, không mất tính tổng quát, giả sử $x = z$, suy ra $\frac{1}{2} \geq x \geq 0, y = 1 - 2x$. Khi đó, ta cần chứng minh

$$\sqrt{x+y^2} + \sqrt{y+x^2} + \sqrt{x+x^2} \leq \frac{11}{5}$$

Hay

$$\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + \sqrt{x^2 + x} \leq x + \frac{6}{5}$$

$$\left(\sqrt{4x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+x}\right)^2 \le \left(x+\frac{6}{5}\right)^2$$

$$2\sqrt{(4x^2-3x+1)(x^2+x)} \le -4x^2+\frac{22}{5}x+\frac{11}{25}$$

$$4(4x^2-3x+1)(x^2+x) \le \left(-4x^2+\frac{22}{5}x+\frac{11}{25}\right)^2$$

$$\frac{196}{5}x^3-\frac{596}{25}x^2+\frac{16}{125}x-\frac{121}{625} \le 0 \text{ (đúng do } \frac{1}{2} \ge x \ge 0)$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức không xảy ra.

♡♡♡

167 *Cho các số không âm a, b, c, d thỏa $a+b+c+d=4$, tìm hằng số $k > \frac{64}{27}$ nhỏ nhất để bất đẳng thức sau đúng*

$$\frac{1}{k-abc}+\frac{1}{k-bcd}+\frac{1}{k-cda}+\frac{1}{k-dab} \le \frac{4}{k-1}$$

Lời giải. Cho $d=0, a=b=c=\frac{4}{3}$, ta suy ra được $k \ge \frac{48}{11}$. Ta sẽ chứng minh đây là giá trị cần tìm, tức là

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{48-11abc} \le \frac{4}{37}$$

Đặt $x=ab, y=cd, z=a+b, t=c+d$ thì ta có $\frac{z^2}{4} \ge x \ge 0, \frac{t^2}{4} \ge y \ge 0$, bất đẳng thức được viết lại như sau

$$f(x)=\frac{1}{48-11xc}+\frac{1}{48-11xd}+\frac{96-11yz}{2304-528yz+121xy^2} \le \frac{4}{37}$$

Ta có

$$f''(x)=\frac{242c^2}{(48-11xc)^3}+\frac{242d^2}{(48-11xd)^3}+\frac{2(96-11yz)}{(2304-528yz+121xy^2)^3} \ge 0$$

Suy ra $f(x)$ là hàm lồi, do đó

$$f(x) \le \max\left\{f(0), f\left(\frac{z^2}{4}\right)\right\}$$

Lại có

$$f(0)=\frac{1}{16}+\frac{1}{48-11yz}=\frac{1}{16}+\frac{1}{48-11cdz} \le \frac{1}{16}+\frac{1}{48-11\left(\frac{c+d+z}{3}\right)^3}=\frac{4}{37}$$

$$f\left(\frac{z^2}{4}\right)=\frac{96-11ut}{121yu^2-528ut+2304}+\frac{4}{96-11yz}=g(y)$$

trong đó $u=\frac{z^2}{4}$.

Dễ thấy $g(y)$ cũng là hàm lồi nên

$$g(y) \le \max\left\{g(0), g\left(\frac{t^2}{4}\right)\right\}$$

Ta lại có

$$g(0)=\frac{1}{16}+\frac{1}{48-11ut}=\frac{1}{16}+\frac{1}{48-11\cdot\frac{z}{2}\cdot\frac{z}{2}\cdot t} \le \frac{1}{16}+\frac{1}{48-11\left(\frac{z+t}{3}\right)^3}=\frac{4}{27}$$

$$g\left(\frac{t^2}{4}\right)=\frac{44(4-zt)(11z^2t^2+44zt-768)}{37(384-11z^2t)(384-11zt^2)}+\frac{4}{37} \le \frac{4}{37}$$

(do $zt \le \frac{(z+t)^2}{4} = 4, 11z^2t^2 + 44zt - 768 \le 11{\cdot}4^2 + 44{\cdot}4 - 768 = -416 < 0$)

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Vậy

$$k_{\min} = \frac{48}{11}.$$

♡♡♡

168 *Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức*

$$3(a+b+c) \ge 2\left(\sqrt{a^2+bc} + \sqrt{b^2+ca} + \sqrt{c^2+ab}\right)$$

Lời giải. Nếu $abc = 0$, giả sử $c = 0$ thì dễ thấy bất đẳng thức là hiển nhiên. Xét trường hợp $abc > 0$, không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c > 0$ và $abc = 1$, khi đó, tồn tại các số thực $x \ge y \ge z$ sao cho $a = e^x, b = e^y, c = e^z$, suy ra $x + y + z = 0$, bất đẳng thức đã cho được viết lại như sau

$$\sum_{\text{cyc}} f(x) \ge 0$$

trong đó $f(x) = 3e^t - 2\sqrt{e^{2t} + e^{-t}}$. Ta có

$$f''(t) = \frac{6e^{3t/2}(e^{3t}+1)^{3/2} - 4e^{6t} - 14e^{3t} - 1}{2e^{2t}(e^{2t}+e^{-t})^{3/2}}$$

Đặt $u = e^{-3t/2} > 0$ thì

$$f''(t) = 0 \Leftrightarrow 36u^{-1}(u^{-1}+1)^3 = (4u^{-2} + 14u^{-1} + 1)^2$$

Hay

$$g(u) = u^4 - 9u^3 + 96u^2 + 4u - 20 = 0$$

Ta có $g'(u) = 4u^3 - 27u^2 + 192u + 4 = \frac{1}{4}u(4u-27)^2 + \frac{39}{4}u + 4 > 0$, suy ra $g(u)$ là hàm đồng biến, lại có $g(0) = -20 < 0, g(1) = 73 > 0$ nên phương trình $g(u) = 0$ có duy nhất 1 nghiệm $u_0 > 0$, từ đây ta suy ra $f''(t) = 0$ có duy nhất 1 nghiệm t_0, ngoài ra ta có thể kiểm tra được $f(t)$ lõm trên $(-\infty, t_0]$ và lồi trên $[t_0, +, \infty)$.

Trở lại bài toán của ta, xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $y \ge t_0$, khi đó, sử dụng bất đẳng thức Jensen, ta có

$$f(x) + f(y) \ge 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Ta cần chứng minh

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(z) \ge 0$$

Đặt $m = e^{(x+y)/2} = \sqrt{ab} \ge e^z = c$, thì sau khi đồng bậc, ta được bất đẳng thức tương đương

$$3(2m+c) \ge 2\left(2\sqrt{m^2+mc} + \sqrt{m^2+c^2}\right)$$

Bình phương 2 vế rồi thu gọn, ta có thể viết lại bất đẳng thức như sau

$$16m^2 + 20mc + 5c^2 \ge 16\sqrt{m(m+c)(m^2+c^2)}$$

Hay

$$8\left(\sqrt{m^2+mc} - \sqrt{m^2+c^2}\right)^2 + 3c(4m-c) \ge 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.

Trường hợp 2. $y \le t_0$, khi đó, ta có $t_0 \ge y \ge y+z-t_0$, suy ra

$$f(y)+f(z) \ge f(t_0)+f(y+z-t_0)$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Jensen, ta lại có

$$f(x)+f(t_0) \ge 2f\left(\frac{x+t_0}{2}\right)$$

Ta cần chứng minh

$$2f\left(\frac{x+t_0}{2}\right)+f(y+z-t_0) \ge 0$$

Bất đẳng thức này đúng theo trường hợp trên. Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) \sim (1,1,0)$.

Nhận xét. Trong bài này, có một kỹ thuật đáng chú ý chính là việc đổi biến $u=e^{-3t/2}$, các bạn hãy nghĩ xem tại sao ta lại không đặt $u=e^{3t/2}$ cho "tiện" mà lại đặt như thế? Để tìm câu trả lời, ta hãy thử đặt $u=e^{3t/2}$, khi đó phương trình $f''(t)=0$ tương đương với

$$g(u)=20u^4-4u^3-96u^2+9u-1=0$$

Ta có $g'(u)=80u^3-12u^2-192u+9$, đến đây các bạn có thể thấy thật khó mà xác định được sự biến thiên của $g(u)$, điều này sẽ gây khó khăn ít nhiều cho ta trong việc giải bài toán, ngược lại nếu ta đặt $u=e^{-3t/2}$ thì sau khi thu gọn, ta lại được ngay một hàm đồng biến! Xin được nêu một ví dụ đơn giản để các bạn có thể thấy rõ hơn điều này: Xác định số nghiệm dương nếu có của phương trình $h(x)=22x^{13}-12x^{12}-1990=0$, nếu các bạn vẫn giữ nguyên và xét hàm số theo biến x thì ta có $h'(x)=2x^{11}(143x-72)$, từ đây, có thể thấy $h(x)$ giảm trên $\left(0,\frac{72}{143}\right]$ và tăng trên $\left[\frac{72}{143},+\infty\right)$, nghĩa là $h(x)$ có 2 khoảng biến thiên. Bây giờ nếu ta đặt $x=\frac{1}{t}$ thì phương trình tương tương $\frac{22}{t^{13}}-\frac{12}{t^{12}}-1990=0$, hay $m(t)=1990t^{13}+12t-22=0$, rõ ràng $m(t)$ là hàm đồng biến trên $(0,+\infty)$, lại có $g(0)=-22<0, g(1)=1980>0$ nên phương trình $m(t)=0$ có nghiệm dương t duy nhất, chú ý rằng với mỗi giá trị $t>0$ chỉ cho ta một giá trị $x>0$, do đó phương trình $h(x)=0$ có nghiệm dương x duy nhất. Các bạn thấy không, đây là một kỹ thuật khá hay đúng không nào? :)

♡♡♡

169 *Cho dãy dương $\{x_n\}$ thỏa $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \ge \sqrt{k}$ với mọi $k=1,2,\ldots,n$, chứng minh bất đẳng thức*

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \ge \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

Lời giải. Xét hàm số $f(x)=x^2$ với $x>0$, ta có

$$f'(x)=2x>0, \qquad f''(x)=2>0$$

Suy ra $f(x)$ là hàm lồi, do đó sử dụng bổ đề Lagrange, ta có

$$f(x_i) \ge f\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)+f'\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)\left(x_i-\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)\right) \qquad \forall i=1,2,\ldots,n$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \ge \sum_{i=1}^{n} f\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)+\sum_{i=1}^{n} f'\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)\left(x_i-\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)\right)$$

Sử dụng kỹ thuật nhóm Abel, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} f'\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)\left(x_i-\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(f'\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)-f'\left(\sqrt{i+1}-\sqrt{i}\right)\right)\left(\sum_{j=1}^{i} x_j-\sum_{j=1}^{i}\left(\sqrt{j}-\sqrt{j-1}\right)\right)$$
$$+f'\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i-\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(f'\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)-f'\left(\sqrt{i+1}-\sqrt{i}\right)\right)\left(\sum_{j=1}^{i} x_j-\sqrt{i}\right)+f'\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i-\sqrt{n}\right)$$

Chú ý rằng với mọi $i \geq 1$ thì $\sqrt{i+1}+\sqrt{i} \geq \sqrt{i}+\sqrt{i-1}$, hay

$$\frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}}$$

Hay

$$\sqrt{i}-\sqrt{i-1} \geq \sqrt{i+1}-\sqrt{i}>0$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} f'\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)\left(x_i-\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)\right) \geq 0$$

Ta còn phải chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i}$$

Để chứng minh, ta chỉ cần chú ý rằng với mọi $i \geq 1$ thì

$$\sqrt{i}-\sqrt{i-1} \geq \frac{1}{2\sqrt{i}}$$

Thật vậy, ta có

$$2\sqrt{i}\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right) \geq\left(\sqrt{i}+\sqrt{i-1}\right)\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)=1$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức không xảy ra.

♡♡♡

170 *Cho các số không âm a, b, c thỏa $6 \geq a+b+c \geq 3$, chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1} \geq \sqrt{15+ab+bc+ca}$$

Lời giải. **Cách 1.** Đặt $x^2=1+a, y^2=1+b, z^2=1+c, d=x^2+y^2+z^2$ thì ta có $x, y, z \geq 1$ và $9 \geq d \geq 6$, bất đẳng thức trở thành

$$x+y+z \geq \sqrt{18-2d+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$$

Hay

$$3d+2(xy+yz+zx) \geq 18+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$$

Sử dụng giả thiết $9 \geq d \geq 6$ và bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$3d(d-6) \geq \frac{1}{3}d^2(d-6) \geq(d-6)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

Suy ra
$$3d+\frac{6(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}{d}\ge 18+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$$
Ta cần chứng minh
$$xy+yz+zx\ge \frac{3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}{d}$$
Hay
$$(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)\ge 3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$
$$\sum_{\text{cyc}}(y+z)(4x-y-z)(x-y)(x-z)\ge 0$$
$$(5xy+3zx+3yz-7z^2)(x-y)^2+(4z-x-y)(x+y)(x-z)(y-z)\ge 0$$
Mặt khác lại có
$$9z^2\ge 9\ge x^2+y^2+z^2$$
Suy ra
$$8z^2\ge x^2+y^2\ge \frac{(x+y)^2}{2}$$
Do đó
$$4z-x-y\ge 0$$
Từ đây, với giả sử $z=\min\{x,y,z\}$, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=b=c=2$.

Cách 2. Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\min\{a,b,c\}$, suy ra $c\le 2$. Đặt $t=\sqrt{(a+1)(b+1)}$ thì ta có $1+\frac{a+b}{2}\ge t\ge \sqrt{a+b+1}$, bất đẳng thức đã cho được viết lại như sau
$$f(t)=\sqrt{2t+a+b+2}+\sqrt{c+1}-\sqrt{t^2+14+(a+b)(c-1)}\ge 0$$
Ta có
$$f''(t)=-\frac{1}{(2t+a+b+2)^{3/2}}-\frac{14+(a+b)(c-1)}{(t^2+14+(a+b)(c-1))^{3/2}}<0$$
Suy ra $f(t)$ là hàm lõm, do đó
$$f(t)\ge \min\left\{f\left(\sqrt{a+b+1}\right),f\left(1+\frac{a+b}{2}\right)\right\}$$
Ta có $f\left(\sqrt{a+b+1}\right)\ge 0$, thật vậy đặt $y=\sqrt{(c+1)(a+b+1)}$ thì $1+\frac{a+b+c}{2}\ge y\ge\sqrt{a+b+c+1}$, bất đẳng thức tương đương
$$g(y)=1+\sqrt{2y+a+b+c+2}-\sqrt{y^2+14-a-b-c}\ge 0$$
Ta cũng có $g''(y)=-\frac{1}{(2y+a+b+c+2)^{3/2}}-\frac{14-a-b-c}{(y^2+14-a-b-c)^{3/2}}<0$ nên $g(y)$ cũng là hàm lõm, do đó
$$g(y)\ge \min\left\{g\left(\sqrt{a+b+c+1}\right),g\left(1+\frac{a+b+c}{2}\right)\right\}$$
Lại có
$$g\left(\sqrt{a+b+c+1}\right)=\sqrt{a+b+c+1}+2-\sqrt{15}\ge 4-\sqrt{15}>0$$
$$g\left(1+\frac{a+b+c}{2}\right)=1+2\sqrt{m+1}-\sqrt{m^2+15}=h(m)$$
với $m=\frac{a+b+c}{2}\in\left[\frac{3}{2},3\right]$. Ta có $h''(m)=-\frac{1}{2(m+1)^{3/2}}-\frac{15}{(m^2+15)^{3/2}}<0$ nên $h(m)$ là hàm lõm, suy ra
$$h(m)\ge\min\left\{h\left(\frac{3}{2}\right),h(3)\right\}=\min\left\{\sqrt{10}+1-\frac{\sqrt{69}}{2},5-\sqrt{24}\right\}>0$$

Ta còn phải chứng minh $f\left(1+\frac{a+b}{2}\right) \geq 0$, đặt $x = \frac{a+b}{2}$, suy ra $\frac{6-c}{2} \geq x \geq \frac{3-c}{2}$ thì bất đẳng thức tương đương

$$u(x) = 2\sqrt{x+1} + \sqrt{c+1} - \sqrt{x^2+2xc+15} \geq 0$$

Ta có $u''(x) = -\frac{1}{2(x+1)^{3/2}} - \frac{15-c^2}{(x^2+2xc+15)^{3/2}} < 0$, suy ra $u(x)$ là hàm lõm, do đó

$$u(x) \geq \min\left\{u\left(\frac{6-c}{2}\right), u\left(\frac{3-c}{2}\right)\right\}$$

Lại có

$$u\left(\frac{6-c}{2}\right) = \frac{3(c-2)^2(20+20c-3c^2)}{2\left(2\sqrt{2(8-c)}+2\sqrt{c+1}+\sqrt{-3c^2+12c+96}\right)\left(8\sqrt{2(8-c)(c+1)}-3c^2+16c+28\right)}$$

$$u\left(\frac{3-c}{2}\right) = \frac{3(c-1)^2(5-c)(3c+1)}{2\left(2\sqrt{2(5-c)}+2\sqrt{c+1}+\sqrt{-3c^2+6c+69}\right)\left(8\sqrt{2(5-c)(c+1)}-3c^2+10c+25\right)}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

♡♡♡

171 *Cho các số dương a, b, c thỏa $abc = 1$, chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{ab+bc+ca+1} \geq 1$$

Lời giải. Luôn tồn tại ít nhất 2 số trong 3 số a, b, c không lớn hơn 1 hoặc không nhỏ hơn 1, không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0$, suy ra $1 + ab \geq a + b$, do đó

$$\frac{1}{ab+bc+ca+1} \geq \frac{1}{(c+1)(ab+1)} = \frac{c}{(c+1)^2}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} = \frac{ab(a-b)^2 + (ab-1)^2}{(ab+1)(a+1)^2(b+1)^2} + \frac{1}{ab+1} \geq \frac{1}{ab+1} = \frac{c}{c+1}$$

Do đó

$$VT \geq \frac{c}{c+1} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{c}{(c+1)^2} = 1$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a, b \to +\infty, c \to 0$ và các hoán vị.

♡♡♡

172 *Cho các số dương x, y, z. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{\frac{x}{8y+z}} + \sqrt{\frac{y}{8z+x}} + \sqrt{\frac{z}{8x+y}} \geq 1$$

Lời giải. Đặt $x = a^2, y = b^2, z = c^2$ $(a, b, c > 0)$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{8b^2+c^2}} \geq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{8b^2+c^2}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{8b^2+c^2} + b\sqrt{8c^2+a^2} + c\sqrt{8a^2+b^2}}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$(a+b+c)^2 \geq a\sqrt{8b^2+c^2} + b\sqrt{8c^2+a^2} + c\sqrt{8a^2+b^2}$$

Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. Nếu $a \geq b \geq c$, xét hàm số $f(a) = VT - VP$, ta có

$$\begin{aligned}
f'(a) &= 2(a+b+c) - \sqrt{8b^2+c^2} - \frac{ab}{\sqrt{a^2+8c^2}} - \frac{8ac}{\sqrt{8a^2+b^2}} \\
f''(a) &= 2 - \frac{8bc^2}{(a^2+8c^2)^{3/2}} - \frac{8b^2c}{(8a^2+b^2)^{3/2}} \geq 2 - \frac{8bc^2}{(b^2+8c^2)^{3/2}} - \frac{8b^2c}{(8b^2+b^2)^{3/2}} \\
&= 2 - \frac{8c}{27b} - \frac{8bc^2}{(b^2+8c^2)^{3/2}} \geq 0
\end{aligned}$$

Suy ra $f'(a)$ là hàm đồng biến, do đó

$$f'(a) \geq f'(b) = 4b - \frac{2}{3}c - \sqrt{8b^2+c^2} - \frac{b^2}{\sqrt{b^2+8c^2}} \geq 0$$

Do đó $f(a)$ là hàm đồng biến, như thế

$$f(a) \geq f(b) = 4b^2 + bc + c^2 - b\sqrt{8b^2+c^2} - b\sqrt{b^2+8c^2} \geq 0$$

Trường hợp 2. Nếu $c \geq b \geq a$, xét hàm số $F(c) = VT - VP$, ta cũng có

$$\begin{aligned}
F'(c) &= 2(a+b+c) - \sqrt{8a^2+b^2} - \frac{8bc}{\sqrt{8c^2+a^2}} - \frac{ac}{\sqrt{c^2+8b^2}} \\
F''(c) &= 2 - \frac{8a^2b}{(8c^2+a^2)^{3/2}} - \frac{8ab^2}{(c^2+8b^2)^{3/2}} \geq 2 - \frac{8a^2b}{(8b^2+a^2)^{3/2}} - \frac{8ab^2}{(b^2+8b^2)^{3/2}} \\
&= 2 - \frac{8a}{27b} - \frac{8a^2b}{(8b^2+a^2)^{3/2}} \geq 0
\end{aligned}$$

Suy ra $F'(c)$ là hàm đồng biến, do đó

$$F'(c) \geq F'(b) = 4b + \frac{5}{3}a - \sqrt{8a^2+b^2} - \frac{8b^2}{\sqrt{a^2+8b^2}} \geq 0$$

Như thế $F(c)$ là hàm đồng biến, vậy

$$F(c) \geq F(b) = a^2 + ab + 4b^2 - b\sqrt{a^2+8b^2} - b\sqrt{8a^2+b^2} \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

♡♡♡

173 *Cho các số thực dương a, b, c có tổng bằng 1, chứng minh rằng*

$$\sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{12}} + \sqrt{b + \frac{(c-a)^2}{12}} + \sqrt{c + \frac{(a-b)^2}{12}} \leq \sqrt{3}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{12}}\right)^2 &= \left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{a+1} \cdot \sqrt{\frac{a + \frac{(b-c)^2}{12}}{a+1}}\right)^2 \leq \left(\sum_{\text{cyc}} (a+1)\right)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a + \frac{(b-c)^2}{12}}{a+1}\right) \\
&= \sum_{\text{cyc}} \frac{4a}{a+1} + \frac{1}{3}\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{c+1}
\end{aligned}$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{4a}{a+1} + \frac{1}{3}\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{c+1} \le 3$$

Chú ý rằng

$$3 - \sum_{\text{cyc}} \frac{4a}{a+1} = \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{(a+1)(b+1)}$$

Nên bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{\text{cyc}} (a-b)^2 \left(\frac{3}{(a+1)(b+1)} - \frac{1}{c+1}\right) \ge 0$$

Mặt khác, ta lại có

$$\frac{3}{(a+1)(b+1)} - \frac{1}{c+1} \ge \frac{12}{(a+b+2)^2} - \frac{1}{c+1} = \frac{12}{(3-c)^2} - \frac{1}{c+1} = \frac{3+18c-c^2}{(3-c)^2(c+1)} \ge 0$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Nhận xét. Bằng cách làm tương tự, ta có kết quả khá đẹp sau

$$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{8}} + \sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{8}} + \sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{8}} \le \sqrt{3}$$

Tổng quát hơn, ta có hằng số k tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{k}} + \sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{k}} + \sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{k}} \le \sqrt{3}$$

là $k = 2\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Có thể chứng minh kết quả này như sau

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{k}}\right)^2 = \left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{a+\frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{\frac{a+\frac{(b-c)^2}{k}}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}}\right)^2 \le \left(\sum_{\text{cyc}} \left(a+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a+\frac{(b-c)^2}{k}}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)$$
$$= \left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{c+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)$$

Như vậy, ta chỉ cần chỉ ra rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{c+\frac{1}{\sqrt{3}}} \le \frac{3}{\sqrt{3}+1}$$

Đặt $r = abc, q = ab+bc+ca$ thì ta có $r \le \frac{q^2}{3}, q \le \frac{1}{3}$, khi đó bất đẳng thức trên tương đương với

$$9\left(2+\sqrt{3}\right)r - q\left(6q+\sqrt{3}\right) \le 0$$

Ta có

$$9\left(2+\sqrt{3}\right)r - q\left(6q+\sqrt{3}\right) \le 3q^2\left(2+\sqrt{3}\right) - q\left(6q+\sqrt{3}\right) = q(3q-1)\sqrt{3} \le 0$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=1, b=c=0$ và các hoán vị.

♡♡♡

Phụ lục A

Tác giả các bài toán

– **Phạm Thị Hằng**	[18]
– **Võ Quốc Bá Cẩn**	[1] [6] [21] [26] [27] [28] [35] [36] [44] [45] [46] [47] [48] [50] [52] [53] [54] [55] [56] [57] [59] [61] [63] [64] [65] [66] [68] [73] [76] [77] [78] [80] [86] [89] [90] [92] [94] [95] [97] [101] [102] [103] [106] [107] [108] [109] [110] [113] [114] [117] [122] [123] [126] [135] [139] [140] [141] [142] [144] [150] [151] [152] [158] [166] [167] [168]
– **Nguyễn Văn Thạch**	[17] [23] [24] [38] [44] [61] [84] [109] [162] [163] [164] [172]
– **Nguyễn Phi Hùng**	[51]
– **Phan Hồng Sơn**	[9] [10] [100] [104] [165]
– **Phạm Kim Hùng**	[3] [7] [8] [20] [30] [31] [42] [70] [118] [120] [137] [143] [156] [160] [161]
– **Phạm Văn Thuận**	[39] [40] [43] [49] [81] [82] [85] [119] [121] [127] [134] [154] [157]
– **Phạm Hữu Đức**	[4] [29] [34] [37] [41] [69] [87] [93] [125] [128] [132] [145] [147] [159]
– **Vasile Cirtoaje**	[14] [33] [83] [84] [111] [158] [173]
– **Nguyễn Anh Cường**	[16] [22] [124]
– **Phạm Sinh Tân**	[58] [115]
– **Phan Thành Nam**	[13] [91] [174]
– **Lê Văn Chánh**	[11]
– **Darij Grinberg**	[62]
– **Gabriel Dospinescu**	[74] [146]
– **Kiran Kedlaya**	[75]
– **Nguyễn Anh Tuấn**	[96] [129]
– **Vũ Đình Quý**	[98] [136]
– **Thomas J. Mildorf**	[99]
– **Phan Thành Việt**	[116]
– **Iurie Borieco**	[133]
– **Ivan Borsenco**	[133]
– **Đinh Tuấn Đông**	[2]
– **Titu Andreescu**	[169]